PLAN MATHÉMATIQUES COLLÈGE
Vers un enseignement efficace et explicite de la résolution de problèmes

Cadre & objectifs

Rappel des mesures 5 et 6 du plan Villani-Torossian / Plan pour l'enseignement des mathématiques

Dès le plus jeune âge, il est souhaitable de mettre en œuvre un apprentissage des mathématiques fondé sur la manipulation et l'expérimentation , la verbalisation et l'abstraction. La manipulation tient une place primordiale, mais elle doit être pensée en vue de l'abstraction et ceci dans une perspective de progressivité étendue sur le long terme. S'appuyer sur l'intuition en sachant que « le moment où il s'agit de passer de la forme intuitive à la forme abstraite est le grand art d'un véritable éducateur. » Ce passage du concret à l'abstrait est l'enjeu fondamental.

Au delà de cette éventuelle prise de conscience autour de ces étapes d'apprentissage, l'**objectif principal** sera de **se questionner** quant aux **points d'attention** et à la **multiplicité des leviers d'efficacité** qui permettent de **rendre l'apprentissage de la résolution de problèmes** plus explicite pour l'enseignant et **plus explicite** comme **plus efficace** pour l'élève.

Pourquoi enseigner la résolution de problèmes ? Quels objectifs d'apprentissage ?

- Formation d'un esprit citoyen / Développement d'un esprit critique : fournir des outils pour évaluer la fiabilité d'informations proposées sous forme quantitative ou visuelle.
- Développement d'une culture scientifique : emploi pour la compréhension et la représentation des systèmes naturels et techniques / mise en œuvre de la démarche scientifique.
- Développement de compétences : prise d'initiative / abstraction / représentation symbolique / reconnaissance de structures, de régularités.
- Ancrage de connaissances mathématiques : sens des opérations / compréhension d'une formule / reconnaissance de relations fonctionnelles entre quantités.

Un point de situation

Un plan mathématiques qui de prolonge

Fonction de RMC / Formations nationales - académiques - locales / Évolution des approches

Un exemple d'enseignement de la résolution de problèmes à l'école primaire

« *J'avais trois mètres de ruban.*
J'ai utilisé la moitié pour coudre des décorations sur une robe.
J'ai pris un tiers du reste pour confectionner un nœud pour une barrette.
Ensuite, j'ai utilisé quatre dixièmes de ce qui me restait.
J'ai besoin de 50 centimètres de ruban pour emballer un cadeau. M'en reste t-il assez ? »

- **Il faut noter la "difficulté" de ce problème et reconnaître que nous avons renoncé à ce type de situations. L'objectif est donc de retrouver dans ce domaine comme dans d'autres une réelle ambition.**

Des stratégies d'apprentissage de la résolution de problèmes

Différentes étapes / différents temps :

- La mise en situation
- La recherche individuelle ou en équipe
- La place éventuelle du matériel
- La verbalisation
- La modélisation
- La vérification
- L'entraînement
- L'institutionnalisation
- L'évaluation

- **La mise en relief des "nouveautés" de pratiques d'enseignement est importante notamment en faisant le lien avec la vidéo précédente : usage de matériel / verbalisation / modélisation**
Bien évidemment, ce n'est pas une révolution des pratiques mais une évolution pour plus de sens, plus d'explicite et au final davantage d'efficacité.
- **La phase d'institutionnalisation n'est pas visible dans la vidéo. Il est donc important de mettre en évidence les deux modèles (additif / multiplicatif) et les diagrammes en barres associés.**
- **On prendra garde à n'utiliser désormais que des diagrammes à double barre et non, ce qui est présent dans le guide CM, des diagrammes à une barrer avec accolade pour le tout.**

Des invariants transférables :

- Créer la mémoire des problèmes, des références exploitables.
- Mobiliser les acquis des élèves sur les procédures et les structures des problèmes déjà rencontrées.
- Faire des liens avec les connaissances sur les faits numériques et les stratégies de calcul.
- S'appuyer sur la manipulation et la verbalisation pour ancrer les concepts : images mentales.

Expérimenter

Une mise en situation

- Comment résoudriez-vous ces problèmes ?
- A qui les destineriez-vous ?
- Quels objectifs viseriez-vous ?
- Comment enseigneriez-vous leur résolution ?
- Quelle trace écrite envisageriez-vous ?

- **L'objectif est ici d'amener à se questionner sur ses propres pratiques. Des questionnements certes classiques comme le niveau auquel je destine le problème, les faits numériques mobilisés, la formulation de l'énoncé mais aussi l'animation "classe" envisagée, la trace écrite prévue...**
- **Pour la trace écrite, il ne faudrait pas en rester à une proposition de solution, la simple réussite, mais viser la modélisation et son transfert dans d'autres situations ou contextes, c'est à dire la compréhension des raisons de la réussite.**
- **Par ces questionnements préalables, nous visons un enseignement explicite de la résolution de problème.**

Situation 1

« *Un père et son fils Kévin ont leur taille dans le ratio de 8 pour 5.*
La différence entre leurs tailles respectives est de 66 cm.
Quelle est la taille du père ? »

Situation 2

« *Léa et Ali ont choisi un nombre entier positif. Léa le multiplie par 5 et ajoute 35.*
Ali le multiplie par 2 et ajoute 146.
Ils trouvent le même nombre à la fin.
Quel nombre ont-ils choisi ? »

Situation 3

« *Anna possède 45 bonbons.*
Elle en mange les trois cinquièmes et donne les deux tiers du reste à son frère Lorenzo.
Combien de bonbons a-t'elle encore ? »

Des pistes à exploiter (3 × 15 minutes)

Des objectifs :

- Accompagner la résolution de problèmes arithmétiques / poursuivre le travail d'apprentissage engagé à l'école.
- Développer des compétences : chercher / modéliser / représenter / calculer / raisonner / communiquer
- Mobiliser le triptyque « manipuler, verbaliser, abstraire ».
- Faire des liens entre les connaissances sur les faits numériques et les stratégies de calcul.
- Découvrir de nouvelles notions au travers de la résolution de problèmes pour ancrer les concepts et construire des images mentales prégnantes et résistantes.

- **La "résolution de problèmes" n'est pas un élément de plus à traiter mais un moyen d'aborder autrement de nombreuses notions et de permettre de les construire en offrant plus de sens aux concepts.**

Situation 1

- Quels intérêts à la représentation en barres ?
  - Permettre aux élèves en difficultés d'écriture symbolique ou en difficultés de lecture d'énoncé écrit d'oraliser à partir d'un registre visuel.
  - Modèle commun / Culture commune, moyen de communication commun.
  - La représentation est « calculable ».
  - Offrir l'opportunité d'étude de concepts mathématiques variés : ratios, proportionnalité, pourcentages, grandeurs…

- **L'introduction de la représentation en barres, même tardivement dans le cursus, lors de l'étude des ratios montre ici clairement son intérêt : donner du sens au concept, proposer une image mentale, aider à modéliser.**

- Dans le cadre de la proportionnalité ?

- **Emploi des représentations en barres / des réglettes pour expliciter les procédures / les propriétés (linéarité additive, linéarité multiplicative, retour à l'unité) employée dans le cadre de la proportionnalité.**
- **Images mentales + mise en relation des grandeurs / sens.**
- **Transition vers le tableau de proportionnalité.**

- Des automatismes ?

- **L'objectif est, après chaque retour sur l'une des situations proposées, de faire le lien avec l'atelier "Automatismes" en contribuant à élargir la conception de ce que peut être un automatisme.**
- **Ici pour commencer, quelques exemples sont proposés dans le cadre général de la résolution de problème et des représentations en barres. Ils sont évidemment adaptables à tout niveau, à tout fait numérique et à toute notion découverte et travaillée.**

Situation 2

- Une entrée dans la pensée algébrique
  - Construction de sens : notion d'égalité / sens du symbole "=" / sens d'une expression algébrique / sens d'une équation.
  - Progressivité de l'entrée dans la pensée algébrique : passages de la manipulation au modèle, du modèle à la pré-algèbre, de la pré-algèbre à l'algèbre.
  - Les problèmes relevant du même modèle de représentation en barres ont la même représentation algébrique.
  - Le traitement des inconnues dans le registre des représentations en barres correspond au traitement des inconnues dans le registre algébrique. : méthode de résolution des équations du premier degré, des systèmes.
    - **Le recours au langage symbolique n'est pas indispensable pour résoudre l'équation sous-jacente à la situation 2. Toutefois l'objectif sera de passer, au rythme du développement de chacun à son usage.**
    - **Une nouvelle fois, on remarquera que la représentation en barre est "calculable" ce qui lui donne un intérêt fondamental.**
  - Emploi de matériel : construction d'images mentales / évitement d'erreurs type « x + 3 = 3x » / visualisation de propriétés arithmétiques « la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3 ».
- Dans le cadre du calcul littéral ?
  - **Images mentales / évitement d'erreurs type « x + 3 = 3x ».**
  - **De nouveau, on onstatera que la représentation en barre est "calculable". Cela se traduit notamment ici par le réarrangement des quantités.**
- Des automatismes ?
  - **Il est à noter que la résolution d'équation peut être abordée sans le recours au langage symbolique. Une réflexion est donc à engager quant à la progressivité d'entrée dans la pensée algébrique.
Ne pas négliger la pré-algèbre.**

Situation 3

- Une aide à la construction des nombres
  - La permanence des modèles (additif / multiplicatif) : on "opère" de la même manière sur le schéma quels que soient les nombres en jeu (entiers, fractionnaires, décimaux).
    - **Encore une fois, on insistera sur le fait que la représentation en barre est "calculable" : même schéma / même relations arithmétiques
Ainsi, de nombreuses occasions sont offertes de réinvestir, d'entretenir des faits numériques travaillés antérieurement.**
  - Les représentations en barre permettent de travailler avec des fractions plus grandes que 1, de considérer les fractions comme des nombres à part entière, de mémoriser des faits numériques, de visualiser des fractions égales...
  - Le modèle comme outil pour accéder au sens des opérations notamment au sens des opérations sur les fractions.
    - **La mise en lumière de la présence du concept de multiplication par une fraction sera particulièrement important.**
  - Stratégie globale autour des représentations des nombres / Mise en évidence des liens entre fractions, pourcentages, proportions.
- Dans le cadre du calcul fractionnaire ?
  - **A la façon de ce qui est fait à l'école, deux propositions d'affichages de classe pour aider à ancrer des images mentales mais aussi à mémoriser des faits numériques.
Quelques exemples de fractions égales et notamment de lien avec les pourcentages mais aussi de calculs fractionnaires visuellement évidents tel 1/3 + 1/6 = 1/2
On peut penser aussi à 75 % = 3 × 25 % = 50 % + 25 % = 100 % – 25 % à rapprocher de 3/4 = 3 × 1/4 = 1/2 + 1/4 = 1 – 1/4**
- Des automatismes ?
  - **La sous-jacence dans le premier exemple du concept de division par une fraction sera clairement rendu explicite.**

Ce qu'il faut retenir

Prendre conscience

- Réussir ≠ comprendre / apprendre.
- Nécessité d'explicite.

Viser

- Une réflexion d'équipe / des stratégies communes (modèles identiques sur la totalité du cursus) / des progressions harmonisées.
- La non limitation au procédural mais en parallèle, proposer une approche structurale : entraîner à identifier des structures, à repérer des invariants, à rendre explicites les modèles correspondants aux problèmes.
- La création de représentation mentales des nombres qui facilitent à la fois la compréhension / la construction du nombre et la résolution de problèmes.
- L'offre d'outils de manipulation pour faciliter l'entrée dans la résolution de problèmes et la confrontation à des problèmes ambitieux et jusqu'ici résistants.
- L'emploi de résolutions de problèmes à tous les stades de l'apprentissage.
- L'emploi des représentations en barres pour l'étude de différentes notions (fractions, pourcentages, proportionnalité, calcul littéral...).