



## ATELIER 3



# LES MATHÉMATIQUES AUJOURD'HUI



◆ ◆ 2019  
◆ 2020 ◆ année des  
mathématiques ◆ ◆ ◆

**LANCEMENT DE L'ANNÉE DES MATHÉMATIQUES**  
**EN PARTENARIAT AVEC LE CNRS.**

<https://www.education.gouv.fr/cid145572/annee-des-mathematiques-2019-2020.html>





2019  
2020 ◆ année des  
mathématiques

## **POURQUOI UNE ANNÉE DES MATHÉMATIQUES ?**

- MONTRER LE VISAGE VIVANT DES MATHÉMATIQUES ;
- DÉCOUVRIR LE PLAISIR QUE L'ON PEUT TIRER DES ACTIVITÉS MATHÉMATIQUES ;
- RENFORCER LE LIEN ENTRE LE MONDE DE LA RECHERCHE ET LES ENSEIGNANTS DU SECONDAIRE.
- DÉCOUVRIR LES DÉBOUCHÉS, ...



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE

académie  
Lille **E**

# ENJEUX



- COMMENT **CRÉER DE L'AMBITION** POUR ACQUÉRIR DES CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES ?
- COMMENT **AIDER NOS ÉLÈVES** EN FIN DE SECONDE ET DE PREMIÈRE À FAIRE LEUR CHOIX ?
- COMMENT FAIRE LE LIEN DES MATHÉMATIQUES AVEC **L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR** ?



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE

académie  
Lille **E**

# LE PARCOURS AVENIR



**LE PARCOURS AVENIR PEUT NOURRIR LE COURS DE MATHÉMATIQUES.**

## → EXEMPLE : COMMERCIALE

DEMANDER AUX ÉLÈVES D'ORGANISER LA JOURNÉE D'UN(E) COMMERCIAL(E), C'EST RÉINVESTIR DES CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES (DURÉES, POURCENTAGES, STATISTIQUE, TABLEUR) TOUT EN PRATIQUANT UNE DÉMARCHE SCIENTIFIQUE ANCRÉE DANS LE RÉEL PUISQUE L'ÉTUDE DE MARCHÉ (DEMANDE, BUDGET, RENTABILITÉ, CONCURRENCE) ET LA CONSULTATION DE VÉRITABLES SITES INTERNET SONT NÉCESSAIRES À LA PRISE DE DÉCISION.



# COMMENT AIDER NOS ELEVES A SE POSITIONNER ?





**JE SUIS UN(E) ÉLÈVE EN FIN DE SECONDE ....**

[HTTP://WWW.SECONDES-PREMIERES2019-2020.FR/](http://www.secondes-premieres2019-2020.fr/)



## ... QUI CHOISIT LA SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES :

→ 4 HEURES D'ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES PAR SEMAINE.

→ OBJECTIF : DÉVELOPPER LEUR CULTURE MATHÉMATIQUE ET ATTEINDRE LE NIVEAU NÉCESSAIRE POUR RÉUSSIR LEURS ÉTUDES SUPÉRIEURES, QU'ELLES SOIENT À DOMINANTE ÉCONOMIQUE, SOCIALE OU SCIENTIFIQUE.





## ... QUI CHOISIT LA VOIE TECHNOLOGIQUE :

→ PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES **COMMUN** À TOUS LES ÉLÈVES DES CLASSES DE PREMIÈRE DE LA VOIE TECHNOLOGIQUE.

→ OBJECIFS :

- **CONSOLIDER** ET **ÉLARGIR** LES ACQUIS DU COLLÈGE ET DE LA CLASSE DE SECONDE ;
- DÉVELOPPER UNE **IMAGE POSITIVE** DES MATHÉMATIQUES ;
- ASSURER LES **BASES** MATHÉMATIQUES NÉCESSAIRES AUX AUTRES DISCIPLINES ENSEIGNÉES ;
- PRENDRE EN COMPTE LES SPÉCIFICITÉS DES SÉRIES TERTIAIRES ET INDUSTRIELLES.

(EXTRAITS DU BO)



**JE SUIS UN(E) ÉLÈVE EN FIN DE PREMIÈRE AYANT CHOISI  
LA SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES ...**



**... JE PEUX :**

Poursuivre la **spécialité mathématiques** **avec** **ou sans** l'option **maths expertes**

Prendre l'option **maths complémentaires**

Tout arrêter



# JE SUIS UN(E) ÉLÈVE EN FIN DE PREMIÈRE TECHNOLOGIQUE ...

**STI2D** (INDUSTRIE ET DÉVELOPPEMENT DURABLE)

**STD2A** (DESIGN ET ARTS APPLIQUES)

**STMG** (MANAGEMENT ET GESTION)

**ST2S** (SANTÉ ET SOCIAL)

**STL** (LABORATOIRE)

**ST2TMD** ( THÉÂTRE, MUSIQUE, DANSE)

**STHR** (HÔTELLERIE, RESTAURATION)

**STAV** (AGRONOMIE, VIVANT)

# ...JE POURSUIS EN TERMINALE TECHNOLOGIQUE .



DES OBJECTIFS DIFFÉRENTS MAIS AVEC UN POINT COMMUN :

**DANS LA CONSTRUCTION DE MON PROJET  
D'ORIENTATION, LES MATHÉMATIQUES SONT NÉCESSAIRES  
POUR MOI !**



## POURQUOI ?

- **FAÇONNER VOTRE ESPRIT ET VOUS CONDITIONNER À RÉFLÉCHIR ET À ANALYSER UN PROBLÈME (PAS NÉCESSAIREMENT MATHÉMATIQUE).**
- **ACQUÉRIR DES MÉTHODES DE RAISONNEMENT ET UNE CERTAINE RIGUEUR DE TRAVAIL.**



## POUR QUELLES ÉTUDES ?

ÉTUDES DE **PHYSIQUE** OÙ LES MATHÉMATIQUES SONT UN OUTIL INDISPENSABLE,  
DE **SOCIOLOGIE**, DE **PSYCHOLOGIE**, DE **BIOLOGIE** OU ENCORE D'**ÉCONOMIE**, ...

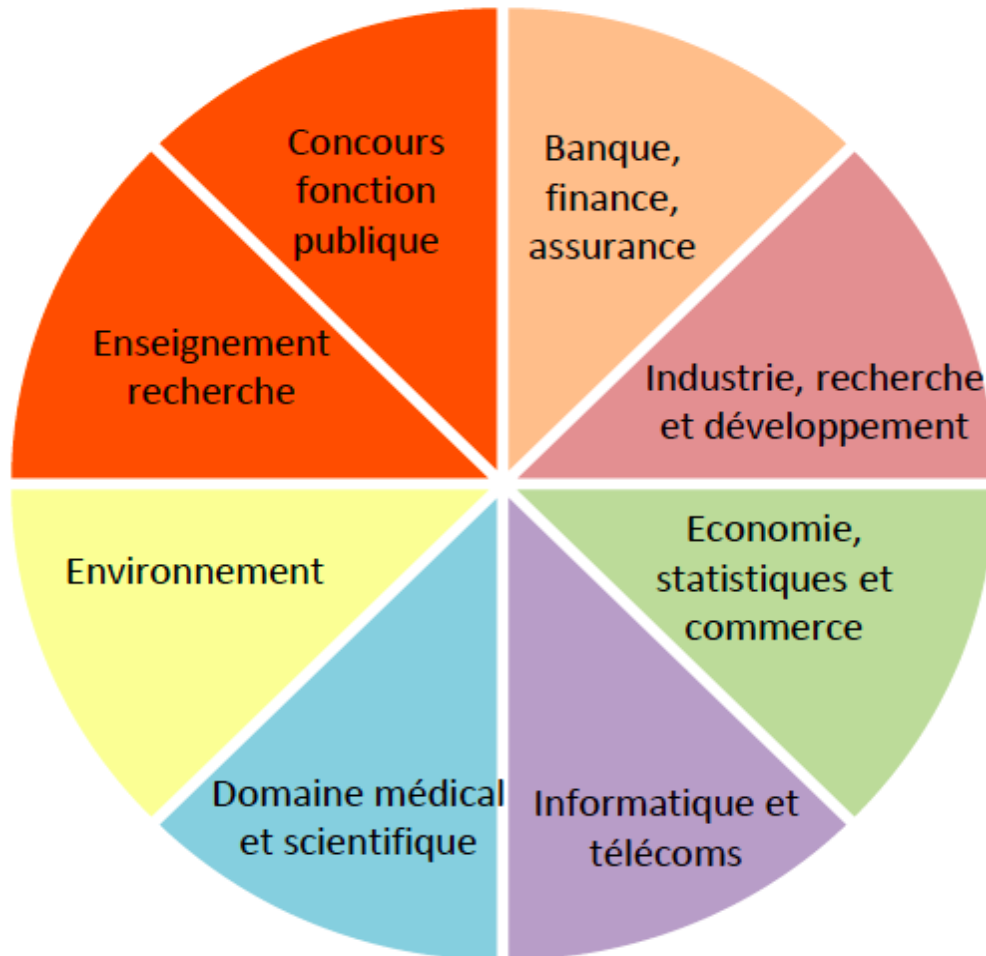
→ VOUS SEREZ CONFRONTÉS À L'ANALYSE D'INTÉGRALES, DE NOMBRES  
COMPLEXES, DE STATISTIQUES, DE PROBABILITÉS, ...



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



BACCALAURÉAT  
2021



## OÙ A T-ON BESOIN DES MATHEMATIQUES ?

SOURCE CRES-ACADÉMIE DE LILLE-JANVIER 2019

[TÉLÉCHARGER LE DOCUMENT RESSOURCE](#)





# POUR AVANCER DANS LA REFLEXION SAVOIR S'APPUYER SUR DES TEMOIGNAGES...



## UN EXEMPLE EN LICENCE DE PSYCHOLOGIE ISSU DU SITE DE L'ONISEP



<https://oniseptv.onisep.fr/widget/licence-de-psycho-idees-recues-sur-le-profil#hide-title>



## DEUX EXEMPLES ISSUS DU SITE BRIQUES 2 MATHS.



<https://youtu.be/XXWzrwHfTh4>



<https://youtu.be/dT0d9295dy0>





## DEUX EXEMPLES APRÈS UNE TERMINALE TECHNOLOGIQUE.

DUT TC



<http://www.onisep.fr/Ressources/Univers-Formation/Formations/Post-bac/DUT-Techniques-de-commercialisation>

BTS TPL



<https://www.youtube.com/watch?v=Yhg4xd16t4s>



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE

académie  
Lille **E**

# TERMINALE TECHNOLOGIQUE



## DANS QUEL BUT ?

- POURSUIVRE **L'ACQUISITION D'UNE CULTURE MATHÉMATIQUE** NÉCESSAIRE POUR ÉVOLUER DANS UN ENVIRONNEMENT MATHÉMATIQUE OÙ LES DONNÉES ET LES GRAPHIQUES SONT OMNIPRÉSENTS
- DÉVELOPPER UNE **IMAGE POSITIVE** DES MATHÉMATIQUES
- ASSURER LES **BASES MATHÉMATIQUES** NÉCESSAIRES AUX AUTRES DISCIPLINES

(EXTRAITS DU BO)



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE

académie  
Lille **É**

# SPÉCIALITÉ MATHS



## POUR QUI ?

ÉLÈVES AYANT CONFIRMÉ CE CHOIX PARMIS LES 3 SPÉCIALITÉS SUIVIES EN PREMIÈRE.



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE

académie  
Lille **E**

# SPÉCIALITÉ MATHS



## DANS QUEL BUT ?

- **CONSOLIDER LES ACQUIS DE PREMIÈRE**
- **DÉVELOPPER LE GOÛT DES MATHÉMATIQUES**
- **DÉVELOPPER DES INTERACTIONS AVEC D'AUTRES ENSEIGNEMENTS DE SPÉCIALITÉ**
- **PRÉPARER AUX ÉTUDES SUPÉRIEURES**

*(EXTRAITS DU BO)*



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE

académie  
Lille **E**

# OPTION MATHS EXPERTES



## POUR QUI ?

ÉLÈVES QUI ONT UN **GOÛT AFFIRMÉ POUR LES MATHÉMATIQUES** ET QUI VISENT DES FORMATIONS OÙ LES MATHÉMATIQUES OCCUPENT UNE PLACE PRÉPONDÉRANTE.





Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE

académie  
Lille **E**

# OPTION MATHS EXPERTES



## DANS QUEL BUT ?

- **CONSOLIDER** LES ACQUIS DE PREMIÈRE
- **DÉVELOPPER LE GOÛT DES MATHÉMATIQUES**
- DÉVELOPPER DES **INTERACTIONS** AVEC D'AUTRES ENSEIGNEMENTS DE SPÉCIALITÉ
- PRÉPARER AUX **ÉTUDES SUPÉRIEURES**

*(EXTRAITS DU BO)*



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# OPTION MATHS COMPLÉMENTAIRES



## POUR QUI ?

ÉLÈVES QUI ONT BESOIN DE COMPLÉTER LEURS CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES MATHÉMATIQUES **POUR LA POURSUITE D'ÉTUDES DANS LE SUPÉRIEUR** (MÉDECINE, ÉCONOMIE, SCIENCES SOCIALES).



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# OPTION MATHS COMPLÉMENTAIRES



- LE PROGRAMME S'APPUIE SUR LE PROGRAMME DE SPÉCIALITÉ DE PREMIÈRE.
- RÉINVESTISSEMENT ET ENRICHISSEMENT DE NOUVELLES CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES, RELIÉES À DES **THÈMES D'ÉTUDE**.
- IL Y A **9 THÈMES D'ÉTUDE** PROPOSÉS.

**LES 9 THÈMES ONT UN CONTENU RICHE ET VARIÉ, AVEC DES VRAIES  
COMPÉTENCES MATHÉMATIQUES.**

*(EXTRAITS DU BO)*



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# DIVERSITÉ DE L'ACTIVITÉ DE L'ÉLÈVE



## SPÉCIALITÉ MATHS / OPTION MATHS EXPERTES

PERMETTRE AUX ÉLÈVES DE PRENDRE  
CONSCIENCE DE LA RICHESSE ET DE LA VARIÉTÉ  
DE LA DÉMARCHE MATHÉMATIQUE ET DE LA  
SITUER **AU SEIN DE L'ACTIVITÉ SCIENTIFIQUE.**

*(EXTRAITS DU BO)*

## OPTION MATHS COMPLÉMENTAIRES

PERMETTRE AUX ÉLÈVES DE PRENDRE  
CONSCIENCE DE LA RICHESSE ET DE LA VARIÉTÉ  
DE LA DÉMARCHE MATHÉMATIQUE ET DE SON  
RÔLE **DANS LES AUTRES DISCIPLINES.**

*(EXTRAITS DU BO)*



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# PLACE DE L'ORAL



LES MATHÉMATIQUES CONTRIBUENT AU DÉVELOPPEMENT DES **COMPÉTENCES ORALES**, NOTAMMENT À TRAVERS LA PRATIQUE DE L'**ARGUMENTATION**.

CELLE-CI CONDUIT À PRÉCISER SA PENSÉE ET À EXPLICITER SON RAISONNEMENT DE MANIÈRE À CONVAINCRE.

*(EXTRAITS DU BO)*

# L'OPTION MATHS COMPLÉMENTAIRES :

QUELQUES PRECISIONS AVANT DE PRESENTER DES ACTIVITÉS AUTOUR  
DE « **L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE** »



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE

# EVOLUTION DES PROGRAMMES



		Terminalespécialité	MathsComplémentaires	MathsExpertes	PremièreSpécialité	Diparaît
<b>ALGEBRE ET GEOMETRIE</b>	combinatoire et dénombrement	*				
	vecteurs, droites et plans de l'espace	*				
	orthogonalité et distances dans l'espace	*				
	représentations paramétriques et équations cartésiennes	*				
	nombres complexes (et trigonométrie)			*		
<b>ARITHMETIQUE</b>	équations polynomiales			*		
<b>ANALYSE</b>	limites de suites	*	*			
	suites arithmético-géométriques		*			
	limites de fonctions	*	*			
	compléments sur la dérivation : fonctions composées, dérivée seconde	*	*			
	fonctions convexes, point d'inflexion	*	*			
	continuité et TVI	*	*			
	fonction logarithme	*	*			
	fonction exponentielle				*	
	fonctions sinus et cosinus	*	*			
	primitives et intégrales (IPP)	*	*			
équations différentielles	*	*				
calcul intégral	*	*				
<b>GRAPHES ET MATRICES</b>				*		
<b>PROBABILITES-STATISTIQUES</b>	probabilités conditionnelles				*	
	schéma de Bernoulli	*	*			
	sommes de variables aléatoires	*				
	concentration, loi des grands nombres (LGT)	*				
	lois uniformes (discrète et continue)		*			
	loi binomiale		*			
	loi géométrique		*			
	loi exponentielle		*			
	inférence bayésienne		*			
	statistiques à deux variables		*			
lois normales					*	
intervalles de confiance					*	



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# OPTION MATHS COMPLÉMENTAIRES ET PROGRAMME DE TERMINALE ES



## PROGRAMME ACTUEL DE TES

CONTINUITÉ  
CONVEXITÉ  
INTÉGRALES ET PRIMITIVES  
SUITES ARITHMÉTIQUE-GÉOMÉTRIQUES  
LOIS À DENSITÉ  
LOI UNIFORME ET BINOMIALE



## En plus (Maths complémentaires)

STATISTIQUES À DEUX VARIABLES (NUAGES / AJUSTEMENTS / MOINDRES CARRÉS)  
EN PROBABILITÉS : LOI GÉOMÉTRIQUE/ LOI EXPONENTIELLE.  
EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES  $Y' = AY + B$   
LIMITES DE FONCTIONS (ASYMPTOTES ET OPÉRATIONS)  
LIMITES DE SUITES (OPÉRATIONS ET THM DES GENDARMES)



## En moins (fait en 1ere)

FONCTION EXPONENTIELLE  
PROBABILITÉS CONDITIONNELLES  
SOMME DES TERMES D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE, SENS DE VARIATION.

## Disparaît

LOIS NORMALES.  
FLUCTUATION D'ÉCHANTILLONNAGE

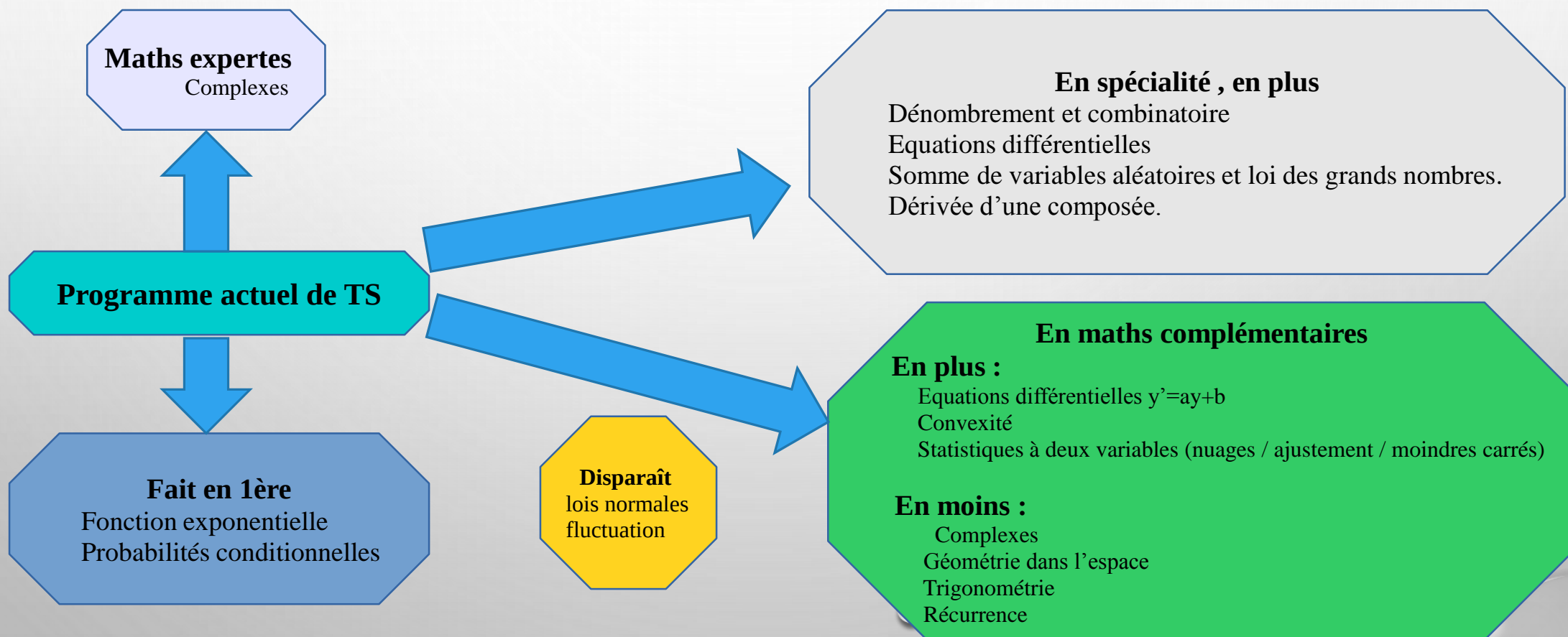




Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# OPTION MATHS COMPLÉMENTAIRES ET PROGRAMME DE TERMINALE S





Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# MATHS COMPLÉMENTAIRES

## QUELLES PARTICULARITÉS ?



- 3 heures
- Un cours optionnel : un public volontaire
- Evalué par l'enseignant dans les bulletins (moins de 1 % de la note finale)  
*" l'évaluation prend en compte et valorise les compétences mathématiques et les qualités recherchées dans les thèmes d'étude : initiative, engagement dans une démarche de recherche, travail d'équipe."*
- un programme original présenté avec une double entrée :
  - Des contenus mathématiques
  - Des thèmes

# MATHS COMPLÉMENTAIRES

## NEUF THEMES



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



- Modèles définis par une fonction d'une variable
- Modèles d'évolution
- Approche historique de la fonction logarithme
- Calculs d'aires
- Répartitions des richesses, inégalités
- Inférence bayésienne
- Répétition d'expériences indépendantes, échantillonnage
- Temps d'attente
- Corrélacion et causalité



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# DES CONTENUS MATHÉMATIQUES



- Analyse

- Suites numériques, modèles discrets
- Fonctions : continuité, dérivabilité, limites, représentation graphique
- Primitives et équations différentielles
- Fonctions convexes
- Intégration

- Probabilités et statistique

- Lois discrètes
- Lois à densité
- Statistiques à deux variables quantitatives

- Analyse

- Suites numériques, modèles discrets
- Fonctions : continuité, dérivabilité, limites, représentation graphique
- Primitives et équations différentielles
- Fonctions convexes
- Intégration



# UN TABLEAU A DOUBLE ENTREE

	Modèles définis par une fonction d'une variable	Modèles d'évolution	Approche historique de la fonction logarithme	Calculs d'aires	Répartition des richesses, inégalités	Inférence bayésienne	Répétition d'expériences, échantillonnage	Temps d'attente	Corrélation et causalité
Suites numériques									
Fonctions									
Primitives et équations différentielles									
Fonctions convexes									
Intégration									
Lois discrètes									
Lois continues									
Statistiques à 2 variables									



# UN TABLEAU A DOUBLE ENTREE ( UN EXEMPLE)

	Modèles définis par une fonction d'une variable	Modèles d'évolution	Approche historique de la fonction logarithme	Calculs d'aires	Répartition des richesses, inégalités	Inférence bayésienne	Répétition d'expériences, échantillonnage	Temps d'attente	Corrélation et causalité
Suites numériques		■		■	■		■		
Fonctions	■		■	■					
Primitives et équations différentielles	■	■		■					
Fonctions convexes	■				■				
Intégration	■		■	■	■				
Lois discrètes		■				■	■	■	■
Lois continues	■	■					■	■	■
Statistiques à 2 variables						■			■



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# PLUSIEURS PROGRESSIONS POSSIBLES



- En partant des thèmes et en y inscrivant le cours pertinent
- En partant du cours et en y inscrivant les thèmes pertinents

# ZOOM SUR UN THÈME PROPOSÉ EN OPTION MATHS COMPLÉMENTAIRES :

## « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE »





Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE »



LE RAISONNEMENT BAYÉSIEN SE RETROUVE DANS DE NOMBREUX DOMAINES PRATIQUES : SPORT, MÉDECINE, JUSTICE, ...

OBJECTIF : DÉCRIRE ET METTRE EN ŒUVRE LES PRINCIPES DU CALCUL UTILISANT DES PROBABILITÉS CONDITIONNELLES ET NOTAMMENT LA **FORMULE DE BAYES** POUR **L'INVERSION DES CONDITIONNEMENTS**.

*(EXTRAITS DU BO)*



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE »



FORMULE DE BAYES :

$$P_B(A) = \frac{P_A(B) \times P(A)}{P(B)}$$

**BIEN COMPRENDRE LA DISTINCTION ENTRE  $P_B(A)$  ET  $P_A(B)$  EST UN OBJECTIF MAJEUR !**

(EXTRAITS DU BO)



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE »



2 VIDÉOS POUR BIEN DÉMARRER :

➤ **LA LOI DE BAYES (1/2) – ARGUMENT FRAPPANT**

<https://www.youtube.com/watch?v=3FOrWMDL8CY>

➤ **LA LOI DE BAYES (2/2) – ARGUMENT FRAPPANT**

<https://www.youtube.com/watch?v=aU7EWwLtiOg>



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE »



## QUELQUES ACTIVITÉS ...



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE »



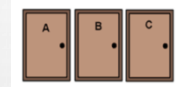
Diagnostic/test



Sally Clark



Une question/jour



3 portes



Valeurs prédictives



Roulette



Activité universitaire



Prévalence



Facebook sait



Urne



Narration recherche



Alarme



Spams



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



## « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE »



**ACTIVITÉ PROPOSÉE PAR UN UNIVERSITAIRE POUR MIEUX  
COMPRENDRE LES ENJEUX DU PROGRAMME :**

**« LES TESTS STATISTIQUES »**



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



## « LES TESTS STATISTIQUES »



### UN PROGRAMME PLUS ORIENTÉ VERS LES STATISTIQUES

D'UN POINT DE VUE PLUS STATISTICIEN, ON PEUT VOIR LA GESTION DES “FAUX POSITIFS” COMME DES **CONTRÔLES D'ERREURS** UTILES À LA PRISE DE DÉCISION : C'EST LA NOTION DE **TESTS STATISTIQUES**. CETTE NOTION EST TYPIQUEMENT CELLE QUE LES ÉLÈVES “NON SCIENTIFIQUES” AURONT À COMPRENDRE ET À UTILISER DANS LEUR FORMATION (EN PSYCHO, MÉDECINE, ÉCONOMIE,...).

PRENONS L'**EXEMPLE EN MÉDECINE** DE L'ÉTUDE D'UN NOUVEAU TRAITEMENT D'UNE MALADIE. LA PHASE 3 DE L'ÉTUDE CONSISTE À COMPARER CE NOUVEAU TRAITEMENT À UN TRAITEMENT DE RÉFÉRENCE (OU À UN PLACEBO) SUR UN CERTAIN NOMBRE DE PATIENTS.



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



## « LES TESTS STATISTIQUES »



AINSI, ON OBSERVE LE NOMBRE DE GUÉRISONS SUR LES  $N$  PATIENTS CONCERNÉS, ET À PARTIR DE CETTE OBSERVATION, ON DOIT **DÉCIDER** SI LE NOUVEAU TRAITEMENT EST MEILLEUR QUE LE TRAITEMENT DE RÉFÉRENCE OU NON.

→ CETTE OBSERVATION EST REPRÉSENTÉE PAR LA RÉALISATION D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE  $X$  QUI SUIT UNE LOI BINOMIALE  $\text{BIN}(N, P)$  OÙ  $P$  EST LA PROBABILITÉ INCONNUE DE GUÉRISON DU NOUVEAU TRAITEMENT

QUELLE QUE SOIT LA DÉCISION PRISE, ELLE EST ENTACHÉE D'**ERREUR** PUISQU'ELLE CONCLUT SUR LA PROBABILITÉ INCONNUE  $P$  À PARTIR D'UNE OBSERVATION DE LA VARIABLE ALÉATOIRE  $X$  SUR UNE PARTIE DE LA POPULATION DES INDIVIDUS ATTEINTS DE CETTE MALADIE.





Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



## « LES TESTS STATISTIQUES »



IL Y A AINSI **DEUX TYPES D'ERREURS** QUI ONT DES CONSÉQUENCES DIFFÉRENTES :

**E1** : CONCLURE QUE LE NOUVEAU TRAITEMENT EST MEILLEUR ALORS QUE CE N'EST PAS LE CAS

→ CONSÉQUENCE : ON VA ADMINISTRER À L'ENSEMBLE DES MALADES UN TRAITEMENT MOINS BON (QUI POTENTIELLEMENT PEUT AVOIR DES EFFETS SECONDAIRES,...)

**E2** : CONCLURE QUE LE NOUVEAU TRAITEMENT N'EST PAS PLUS EFFICACE ALORS QU'EN RÉALITÉ IL L'EST.

→ CONSÉQUENCE : ON RECOMMENCE L'ÉTUDE.



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



## « LES TESTS STATISTIQUES »



CES DEUX ERREURS VARIENT EN SENS INVERSE (ÇA PEUT SE MONTRER FACILEMENT), ET DONC ON NE PEUT RENDRE CES DEUX ERREURS PETITES EN MÊME TEMPS.

→ ON EST DONC AMENÉ À PRIVILIGIER L'UNE DES DEUX ERREURS.

DANS L'EXEMPLE, DU POINT DE VUE DE LA SANTÉ PUBLIQUE, ON PRIVILÉGIE **E1** QUE L'ON APPELLE **ERREUR DE PREMIÈRE ESPÈCE** : C'EST L'ERREUR QU'ON SOUHAITE RENDRE PETITE.

→ ON VEUT MINIMISER LA PROBABILITÉ DE SE TROMPER SI ON CONCLUT QUE LE NOUVEAU TRAITEMENT EST MEILLEUR



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



## « LES TESTS STATISTIQUES »



AINSI, POUR CONSTRUIRE UN TEST, ON SE DONNE UNE MARGE D'ERREUR A PRIORI APPELÉE **NIVEAU DU TEST** (SOUVENT DE 5%), ET ON DÉCIDE ENTRE :

- L'**HYPOTHÈSE NULLE  $H_0$**  (HYPOTHÈSE PAR DÉFAUT) : LE NOUVEAU TRAITEMENT N'EST PAS MEILLEUR,
- L'**HYPOTHÈSE ALTERNATIVE  $H_1$**  (HYPOTHÈSE PAR DÉFAUT) : LE NOUVEAU EST MEILLEUR.

CES DEUX HYPOTHÈSES SE TRADUISENT SUR LE PARAMÈTRE INCONNU **P** :

**$H_0 : P = P_0$  CONTRE  $H_1 : P > P_0$**

OÙ  **$P_0$**  EST LA PROBABILITÉ CONNUE DU TRAITEMENT DE RÉFÉRENCE.



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



## « LES TESTS STATISTIQUES »



CONSTRUIRE LE TEST CONSISTE À SE DONNER UNE **RÈGLE DE DÉCISION** BASÉE SUR L'OBSERVATION DE LA VARIABLE ALÉATOIRE  $X$  SUR LAQUELLE ON CONCLUT  $H_1$ .

ICI, ON CONCLURA  $H_1$  SI LE NOMBRE DE GUÉRISONS  $X$  EST SUFFISAMMENT GRAND ET DÉPASSE UN SEUIL  $K$  OÙ  $K$  EST DÉTERMINÉ DE TELLE SORTE QUE LA PROBABILITÉ DE CONCLURE  $H_1$  À TORT EST INFÉRIEURE AU NIVEAU 5%. AUTREMENT DIT :

$$P(X > K) < 5\% \text{ QUAND } X \text{ SUIVRAIT UNE LOI BIN}(N, P_0)$$

PAR EXEMPLE, SI  $N=35$  ET  $P_0=0.80$ , ON OBTIENT  $K=32$ .



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



## « LES TESTS STATISTIQUES »



### UN EXEMPLE TIRÉ D'UN ARTICLE DE MÉDECINE :

EN MARS 2010, THOMAS ET COLL. ONT SORTI UNE PUBLICATION SUR L'ÉTUDE D'UN NOUVEL ANTICORPS LE « DENOSUMAB » POUR TRAITER LES PATIENTS ATTEINTS DE TUMEUR À CELLULES GÉANTES (UNE TUMEUR RARE TOUCHANT LES OS).

L'ÉTUDE PORTE SUR **35 PATIENTS**, ET SUR CES 35 PATIENTS AYANT ÉTÉ TRAITÉS PAR LE DENOSUMAB, LES MÉDECINS ONT OBSERVÉ UNE **RÉPONSE POSITIVE AU TRAITEMENT SUR 30 PATIENTS**. ON SAIT PAR AILLEURS, QUE LE TRAITEMENT DE RÉFÉRENCE A UNE PROBABILITÉ DE "GUÉRISON" DE **0.80%**.

MALGRÉ TOUT, POUR UN TEST DE NIVEAU 5%, ON NE PEUT CONCLURE QUE CE NOUVEAU TRAITEMENT EST MEILLEUR AVEC UNE PROBABILITÉ D'ERREUR D'AU PLUS 5% (IL AURAIT FALLU PLUS DE 32 RÉPONSES POSITIVES AU TRAITEMENT SUR LES 35 PATIENTS).





Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE »



## ACTIVITÉS INCONTOURNABLES



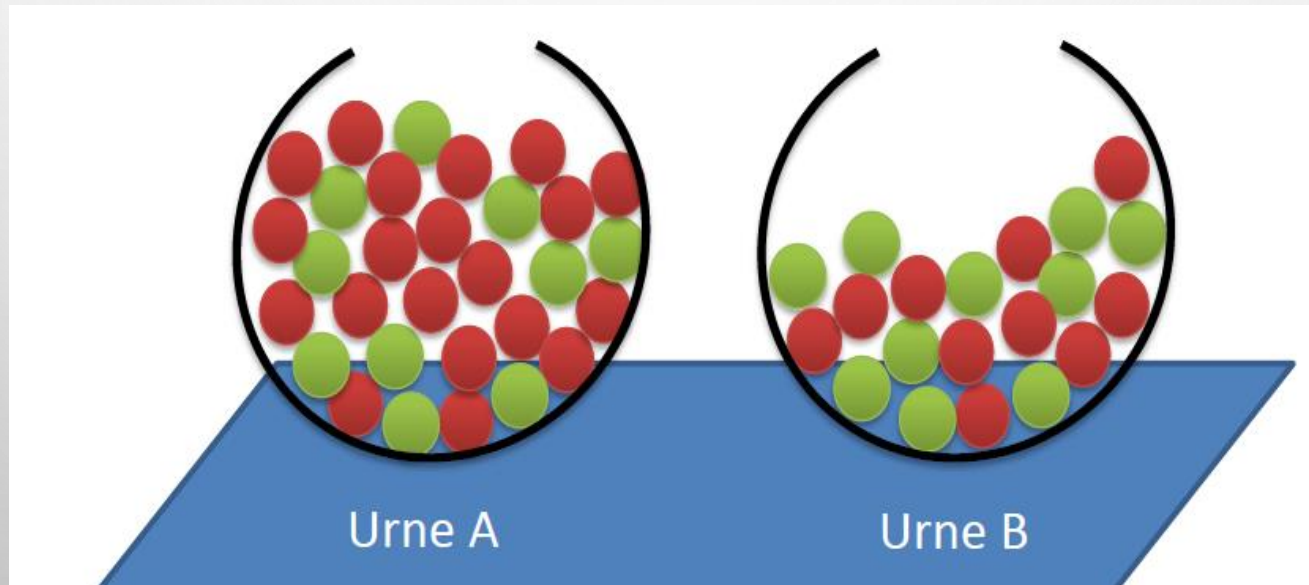
Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE » ACTIVITÉ 1



## ACTIVITÉ 1 : « DE QUELLE URNE VIENT LA BOULE ? »





Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE » ACTIVITÉ 1



DEUX URNES A ET B SONT REMPLIES DE BOULES INDISCERNABLES AU TOUCHER.

L'URNE A CONTIENT DIX BOULES VERTES ET VINGT BOULES ROUGES.

L'URNE B CONTIENT DIX BOULES VERTES ET DIX BOULES ROUGES.

ALEX CHOISIT AU HASARD UNE DES DEUX URNES.

DANS L'URNE CHOISIE, IL TIRE ALORS UNE BOULE AU HASARD. ELLE EST ROUGE.

**→ QUELLE EST LA PROBABILITÉ QU'ALEX AIT TIRÉ CETTE BOULE DANS L'URNE A SACHANT QU'ELLE EST ROUGE ?**





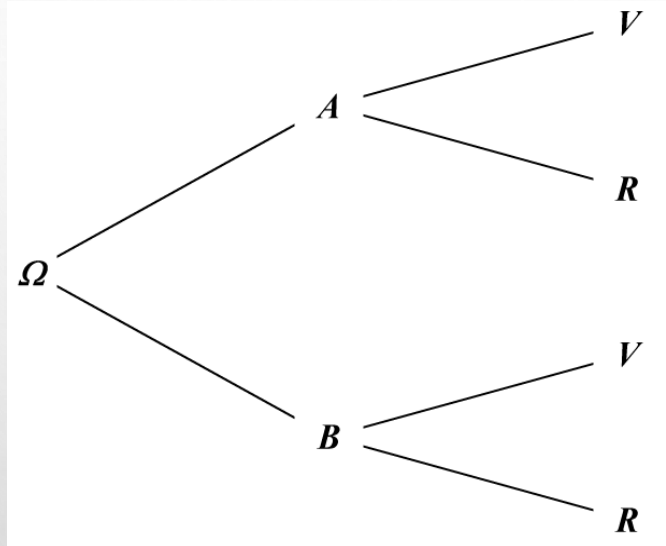
Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE » ACTIVITÉ 1



- RÉFLEXION DES ÉLÈVES.
- COMPLÉTER L'ARBRE :



- CALCUL DE  $P(R)$  PUIS DE  $P_R(A)$  AVEC LA FORMULE DE BAYES.





Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE

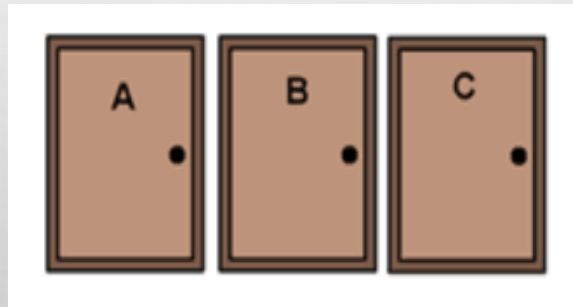


# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE » ACTIVITÉ 2



## ACTIVITÉ 2 : « LE PROBLÈME DES 3 PORTES (PARADOXE DE MONTY HALL) »

LE PROBLÈME DE MONTY HALL EST UN GRAND CLASSIQUE DE LA THÉORIE DES PROBABILITÉS INSPIRÉ D'UN JEU TÉLÉVISÉ AMÉRICAIN APPELÉ *LET'S MAKE A DEAL* ET PRÉSENTÉ PAR UN DÉNOMMÉ MONTY HALL DANS LES ANNÉES 60. À LA FIN DU JEU, UN CANDIDAT DOIT CHOISIR UNE PORTE PARMIS TROIS. DERRIÈRE L'UNE DES PORTES SE TROUVE UNE VOITURE. DERRIÈRE LES DEUX AUTRES SE TROUVENT DES CHÈVRES.





Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE » ACTIVITÉ 2



UNE FOIS LE CHOIX DE PORTE EFFECTUÉ PAR LE CANDIDAT, MONTY HALL FAIT MONTER LE SUSPENSE. PARMIS LES PORTES QUE LE CANDIDAT N'A PAS CHOISIES, IL Y A FORCÉMENT AU MOINS UNE PORTE DERRIÈRE LAQUELLE SE TROUVE UNE CHÈVRE. MONTY HALL RÉVÈLE UNE TELLE PORTE.

IL RESTE ALORS DEUX PORTES. DERRIÈRE L'UNE D'ELLE SE TROUVE LA VOITURE. DERRIÈRE L'AUTRE SE TROUVE UNE CHÈVRE.

MONTY HALL PROPOSE ALORS AUX CANDIDATS UN CHOIX. LE CANDIDAT PEUT CONSERVER SON CHOIX OU IL PEUT LE CHANGER.

**→ QUE DOIT FAIRE LE CANDIDAT ? DOIT-IL SUIVRE SON INSTINCT INITIAL ?**



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE »

## ACTIVITÉ 2



MontyHall.py \* ×

```
1 from random import randint
2
3 def MontyHall(nombre_parties):
4     nb_victoires_si_change=0
5     nb_victoires_si_conserve=0
6     portes=('voiture','chèvre','chèvre')
7     for i in range(nombre_parties):
8         # Le candidat choisit une porte au hasard
9         porte_choisie=portes[randint(0,2)]
10        # Monty Hall ouvre une des deux autres portes, c'est nécessairement une chèvre derrière celle-ci.
11        # La dernière porte contient une voiture si le candidat a choisi une chèvre.
12            if porte_choisie=='chèvre':
13                derniere_porte='voiture'
14        # La dernière porte contient une chèvre si le candidat a choisi une voiture.
15            else:
16                derniere_porte='chèvre'
17            if derniere_porte=='voiture':
18                nb_victoires_si_change=nb_victoires_si_change+1
19            if porte_choisie=='voiture':
20                nb_victoires_si_conserve=nb_victoires_si_conserve+1
21        return(nb_victoires_si_change,nb_victoires_si_conserve)
```

SIMULATION EN PYTHON (VERSION1) :



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE » ACTIVITÉ 2



L'EXÉCUTION DU PROGRAMME DONNE:

```
Shell ×  
Python 3.7.4 (bundled)  
>>> %Run MontyHall.py  
>>> MontyHall(100)  
(66, 34)  
  
>>> MontyHall(1000)  
(655, 345)  
  
>>> MontyHall(10000)  
(6597, 3403)  
  
>>> MontyHall(1000000)  
(667212, 332788)
```

**À LA LUMIÈRE DE CE RÉSULTAT, CHANGEZ-VOUS VOTRE CONSEIL ?**



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE » ACTIVITÉ 2



## SIMULATION EN PYTHON :

```
import random as rd

def change_avis(voiture,choix_candidat):
    if choix_candidat==voiture:
        choix_poss=[k for k in range(1,4) if k!=voiture]
        choix=rd.randint(1,2)-1
        return choix_poss[choix]
    else:
        return voiture
```

## SIMULATION EN PYTHON (VERSION2) :

```
def jeu3portes():
    voiture=rd.randint(1,3)
    choix_candidat=rd.randint(1,3)
    choix_change=change_avis(voiture, choix_candidat)
    return [int(voiture==choix_candidat),int(voiture==choix_change)]

def meilleure_strategie(n):
    sans_change=0
    en_changeant=0
    for k in range(n):
        L=jeu3portes()
        sans_change=sans_change+L[0]
        en_changeant=en_changeant+L[1]
    return [sans_change,en_changeant]
```



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE » ACTIVITÉ 2



L'EXÉCUTION DU PROGRAMME POUR  $n = 10^6$  RENVOIE [333659, 666341].

**À LA LUMIÈRE DE CE RÉSULTAT, CHANGEZ-VOUS VOTRE CONSEIL ?**



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE » ACTIVITÉ 2



**LE CANDIDAT CHOISIT LA PORTE A.**

A (RESP. B ET C) : "LA VOITURE EST DERRIÈRE LA PORTE A (RESP. B ET C) »

E : "MONTY HALL OUVRE LA PORTE PERDANTE B ".

$$P(A) = P(B) = P(C) = 1/3$$

$$P_A(E) = 1/2 \quad P_B(E) = 0 \quad \text{ET} \quad P_C(E) = 1$$

EN EFFET, SI LA VOITURE EST DERRIÈRE A, LE PRÉSENTATEUR A LE CHOIX ENTRE B OU C, ALORS QUE SI ELLE EST DERRIÈRE C, IL N'A PAS LE CHOIX PUISQU'IL NE PEUT PAS PARLER DE A .





Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE »

## ACTIVITÉ 2



$$P(E) = P_A(E) \times P(A) + P_B(E) \times P(B) + P_C(E) \times P(C) = 1/2$$

$$P_E(A) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{P_A(E) \times P(A)}{P(E)} = 1/3 \quad \text{ET} \quad P_E(C) = \frac{P(C \cap E)}{P(E)} = \frac{P_C(E) \times P(C)}{P(E)} = 2/3$$

→ LA PROBABILITÉ DE GAGNER EN CHANGEANT NOTRE CHOIX VAUT  $2/3$  !!





Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE »



## BAYES ET LA MÉDECINE



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE » MÉDECINE – ACTIVITÉ 3



LE THÉORÈME DE BAYES OFFRE AU MÉDECIN DE NOMBREUSES APPLICATIONS EN TANT QU'**OUTIL D'AIDE AU DIAGNOSTIC ET AU PRONOSTIC**.

LORSQU'UN MÉDECIN SUSPECTE UNE MALADIE CHEZ UN DE SES PATIENTS ET QUE L'EXAMEN DE LABORATOIRE OU LE TEST CLINIQUE QU'IL A PRESCRIT À CET EFFET S'AVÈRE « POSITIF », CELA NE SIGNIFIE PAS NÉCESSAIREMENT QUE LE PATIENT SOUFFRE DE LA MALADIE. TOUT LE MONDE CONNAÎT LA NOTION DE « **FAUX POSITIF** ».

IL REVIENT DONC AU MÉDECIN D'ÉVALUER CORRECTEMENT, SUR LA BASE DE LA POSITIVITÉ DU TEST ET D'AUTRES INFORMATIONS DISPONIBLES, LES CHANCES (OU LA PROBABILITÉ) DU PATIENT D'ÊTRE ATTEINT DE LA MALADIE SUSPECTÉE.



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE » MÉDECINE – ACTIVITÉ 3



## ACTIVITÉ 3 : « DIAGNOSTIC ET TEST »

UN TEST PERMET LE DIAGNOSTIC D'UNE MALADIE QUI TOUCHE 1 PERSONNE SUR 1 000.

LE RÉSULTAT DU TEST EST POSITIF OU NÉGATIF ET LE TEST EST FIABLE À 99 % :

→ SI L'INDIVIDU EST MALADE, ALORS LE TEST EST + DANS 99 % DES CAS ;

→ SI L'INDIVIDU EST SAIN, ALORS LE TEST EST – DANS 99 % DES CAS.

UN INDIVIDU PASSE LE TEST ET IL EST POSITIF.

**QUELLE EST LA PROBABILITÉ POUR QUE L'INDIVIDU AIT CONTRACTÉ LA MALADIE ?**



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE » MÉDECINE – ACTIVITÉ 3



M : « L'INDIVIDU EST MALADE » ET T : « LE TEST EST POSITIF » :

$$P(M) = 0,001 \quad \text{et} \quad P_M(T) = 0,99$$

$$\rightarrow \text{ON CALCULE } P(T) = P_M(T) \times P(M) + P_{\bar{M}}(T) \times P(\bar{M}) = \dots = 0,01098$$

$$\rightarrow \text{ON CALCULE } P_T(M) = \frac{P_M(T) \times P(M)}{P(T)} \approx 0,09 \text{ !!!!}$$



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE » MÉDECINE – ACTIVITÉ 3



LE THÉORÈME DE BAYES VISE À CALCULER LES PROBABILITÉS **A POSTERIORI** D'UN ÉVÉNEMENT EN FONCTION DES PROBABILITÉS **A PRIORI** DE CET ÉVÉNEMENT.

A PRIORI ET A POSTERIORI S'ENTENDENT PAR RAPPORT À LA CONNAISSANCE D'UNE INFORMATION. L'EXEMPLE TYPIQUE EST CELUI DU DIAGNOSTIC : A PRIORI ON JUGE QUE LE PATIENT A UNE TELLE PROBABILITÉ D'AVOIR LA MALADIE M.

**→ QUE DEVIENT A POSTERIORI CETTE PROBABILITÉ LORSQUE L'ON APPREND LE RÉSULTAT DE TEL EXAMEN CLINIQUE OU BIOLOGIQUE ?**





Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE » MÉDECINE – ACTIVITÉ 4



## **ACTIVITÉ 4 : SENSIBILITÉ, SPÉCIFICITÉ ET VALEURS PRÉDICTIVES**

**L'EFFICACITÉ D'UN TEST PEUT SE MESURER À L'AIDE DE 2 GRANDEURS : SENSIBILITÉ ET SPÉCIFICITÉ.**

AFIN D'Étudier LA VALIDITÉ D'UN NOUVEAU TEST DE DÉPISTAGE D'UNE MALADIE, 115 PERSONNES MALADES ET 85 PERSONNES QUI NE SONT PAS MALADES SUBISSENT CE TEST:

90 PERSONNES SONT MALADES ET POSITIVES AU TEST TANDIS QUE 75 SONT SAINES (NON-MALADES) ET NÉGATIVES AU TEST.

**→ CALCULER LA SENSIBILITÉ ET LA SPÉCIFICITÉ DE CE TEST.**

**→ CALCULER LES VALEURS PRÉDICTIVES POSITIVES ET NÉGATIVES.**



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE » MÉDECINE – ACTIVITÉ 4



$M$  : « L'INDIVIDU EST MALADE » ET  $T$  : « LE TEST EST POSITIF »

	$M$	$\bar{M}$	Total
$T$	90	10	100
$\bar{T}$	25	75	100
Total	115	85	200





Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE » MÉDECINE – ACTIVITÉ 4



## SENSIBILITÉ

LA SENSIBILITÉ EST LA PROBABILITÉ QU'UN TEST RÉALISE SUR UNE PERSONNE MALADE SE RÉVÈLE POSITIF ; AUTREMENT DIT, QUE LE TEST SOIT POSITIF SACHANT QUE LA PERSONNE EST MALADE.

ICI :

$$SE = P_M(T) = \frac{90}{115} = 0,78$$

	$M$	$\bar{M}$	Total
$T$	90	10	100
$\bar{T}$	25	75	100
Total	115	85	200



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE » MÉDECINE – ACTIVITÉ 4



## SPÉCIFICITÉ

LA SPÉCIFICITÉ EST LA PROBABILITÉ QU'UN TEST RÉALISÉ SUR UNE PERSONNE SAINES SE RÉVÈLE NÉGATIF ; AUTREMENT DIT, QUE **LE TEST SOIT NÉGATIF SACHANT QUE LA PERSONNE N'EST PAS MALADE.**

ICI : 
$$SP = P_{\bar{M}}(\bar{T}) = \frac{75}{85} = 0,88$$

	$M$	$\bar{M}$	Total
$T$	90	10	100
$\bar{T}$	25	75	100
Total	115	85	200



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE » MÉDECINE – ACTIVITÉ 4



## VALEUR PREDICTIVE POSITIVE

LA VALEUR PRÉDICTIVE POSITIVE EST LA PROBABILITÉ QUE LE PATIENT, DONT LE TEST EST POSITIF, SOIT EFFECTIVEMENT MALADE.

ICI :

$$VPP = P_T(M) = \frac{90}{100} = 0,9$$

	$M$	$\bar{M}$	Total
$T$	90	10	100
$\bar{T}$	25	75	100
Total	115	85	200



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE » MÉDECINE – ACTIVITÉ 4



## VALEUR PREDICTIVE NÉGATIVE

LA VALEUR PRÉDICTIVE NÉGATIVE EST LA **PROBABILITÉ QUE LE PATIENT, DONT LE TEST EST NÉGATIF, NE SOIT PAS MALADE.**

ICI :

$$VPN = P_{\bar{T}}(\bar{M}) = \frac{75}{100} = 0,75$$

	$M$	$\bar{M}$	Total
$T$	90	10	100
$\bar{T}$	25	75	100
Total	115	85	200



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE » MÉDECINE – ACTIVITÉ 4



$$VPP = P_T(M) = \frac{P(M) \times SE}{P(M) \times SE + (1 - P(M)) \times (1 - SP)}$$

$$VPN = P_{\bar{T}}(\bar{M}) = \frac{(1 - P(M)) \times SP}{(1 - P(M)) \times SP + P(M) \times (1 - SE)}$$



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE » MÉDECINE – ACTIVITÉ 4



LA SENSIBILITÉ ET LA SPÉCIFICITÉ DU TEST NE SONT PAS DES INFORMATIONS DIRECTEMENT UTILES AU PATIENT AUQUEL LE TEST EST ADMINISTRÉ.

EN EFFET, SUPPOSONS QUE LA SENSIBILITÉ ET LA SPÉCIFICITÉ D'UN CERTAIN TEST SOIENT :

- SENSIBILITÉ = 95%
- SPÉCIFICITÉ = 99%

SUPPOSONS AUSSI QUE LE MÉDECIN APPLIQUE CE TEST À UN PATIENT ET OBTIENT UN RÉSULTAT POSITIF (+).



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE » MÉDECINE – ACTIVITÉ 4



IL S'AGIT DE RÉPONDRE À LA QUESTION :

→ **QUELLE EST LA PROBABILITÉ QUE LE PATIENT SOIT RÉELLEMENT MALADE ?**

POUR RÉPONDRE IL NOUS FAUT UNE INFORMATION SUPPLÉMENTAIRE CONCERNANT LA FRÉQUENCE DE LA MALADIE DANS LA POPULATION, C'EST-À-DIRE LA **PRÉVALENCE** DE LA MALADIE.





Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE » MÉDECINE – ACTIVITÉ 5



## ACTIVITÉ 5 : « LA PRÉVALENCE »

SUPPOSONS PAR EXEMPLE, QU'IL Y AIT 1 SEUL MALADE PAR 10 000 HABITANTS (*PRÉVALENCE* =  $1/10\ 000$ ). LA PRÉVALENCE DE  $1/10\ 000$  NOUS PERMET D'AFFIRMER QUE DANS UNE POPULATION HYPOTHÉTIQUE DE 1 000 000 D'INDIVIDUS, ON PEUT S'ATTENDRE À 100 MALADES ET 999 900 SAINS.

LE TEST DÉPISTE 95 CAS POSITIFS ET 5 CAS NÉGATIFS PARMIS LES MALADES, CAR LA SENSIBILITÉ EST DE 95%.

LE TEST TROUVE AUSSI 9 999 RÉSULTATS POSITIFS ET 989 901 RÉSULTATS NÉGATIFS DANS LA PARTIE SAINTE DE LA POPULATION.

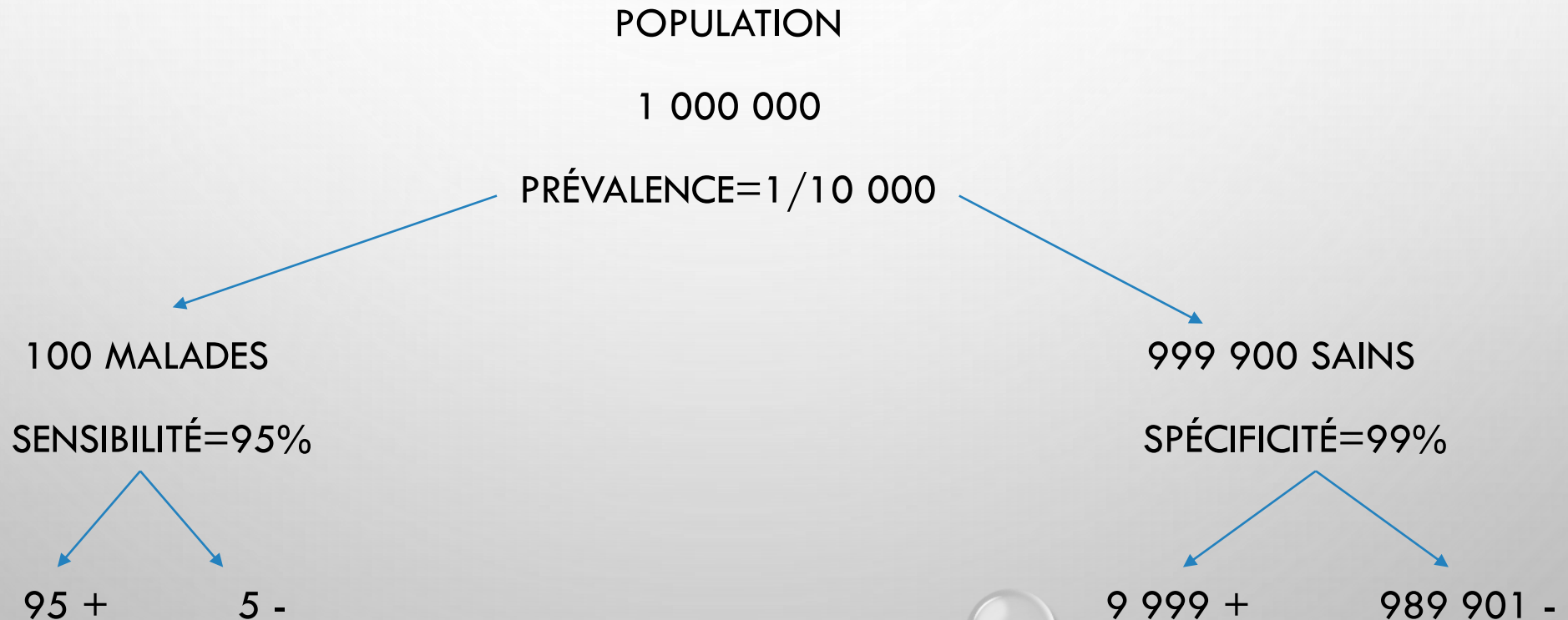




Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE » MÉDECINE – ACTIVITÉ 5





Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE » MÉDECINE – ACTIVITÉ 5



M : « l'individu est malade » et T : « le test est positif »

$$P(M|T) = \frac{P(T|M) \cdot P(M)}{P(T|M) \cdot P(M) + P(T|\bar{M}) \cdot P(\bar{M})}$$

sensibilité=0.95

prévalence=0.0001

1-spécificité=0.01

1-prévalence=0.9999



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE

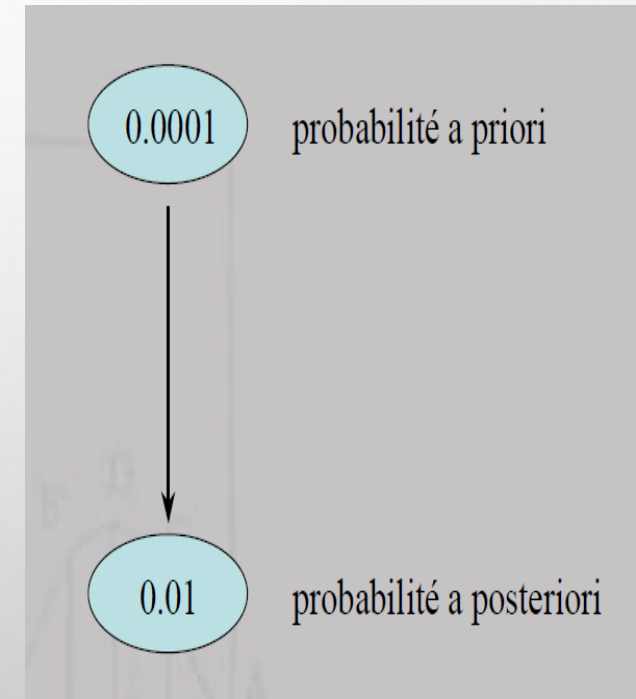


# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE » MÉDECINE – ACTIVITÉ 5



$$P(M|T) = \frac{0.95 \cdot 0.0001}{0.95 \cdot 0.0001 + 0.01 \cdot 0.9999}$$

$$P(M|T) = 0.0094$$





Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE » MÉDECINE - ACTIVITÉ 6



## ACTIVITÉ 6 : UNE NARRATION DE RECHERCHE

UNE MALADIE TOUCHE 5 % DE LA POPULATION.

UNE FIRME PHARMACEUTIQUE A DÉVELOPPÉ UN TEST SANGUIN DE DÉPISTAGE DE CETTE MALADIE ET A EFFECTUÉ DES ESSAIS CLINIQUES.

ELLE A OBTENU LES RÉSULTATS SUIVANTS :

- *SI LA PERSONNE EST MALADE, LE TEST A 98 CHANCES SUR 100 DE LA DÉCLARER POSITIVE.*
- *SI ELLE N'EST PAS MALADE, LE TEST PEUT QUAND MÊME LA DÉCLARER POSITIVE AVEC 1 CHANCE SUR 100.*



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE » MÉDECINE - ACTIVITÉ 6



L'AGENCE DE SANTÉ PUBLIQUE SOUHAITE SAVOIR SI ON DOIT OU NON AUTORISER LA COMMERCIALISATION DE CE TEST.

UN SALARIÉ DE L'AGENCE A ENTAMÉ LA RÉFLEXION. IL S'APPUIE POUR CELA SUR CES « VIEILLES » CONNAISSANCES DE LYCÉE... IL PREND DONC UNE PERSONNE AU HASARD QUI SE PRÉSENTE À L'HÔPITAL

POUR PASSER LE TEST ET NOTE  $M$  ET  $T$  LES DEUX ÉVÈNEMENTS SUIVANTS :

$M$  : « LA PERSONNE EST MALADE »

$T$  : « LA PERSONNE EST DÉCLARÉE POSITIVE ».



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE » MÉDECINE - ACTIVITÉ 6



MALHEUREUSEMENT, IL NE SAIT PAS ALLER PLUS LOIN ET VOUS DEMANDE DONC DE L'AIDER À  
POURSUIVRE LE TRAVAIL...

A PARTIR DES NOTATIONS PROPOSÉES PAR LE SALARIÉ ET DES DONNÉES DE LA FIRME  
PHARMACEUTIQUE, **CALCULER LA PROBABILITÉ QUE LE TEST DÉCLARE CETTE PERSONNE POSITIVE.**

PAR AILLEURS SI LE TEST A DÉCLARÉ LA PERSONNE POSITIVE, **COMMENT CALCULER ALORS LA  
PROBABILITÉ QUE CETTE PERSONNE SOIT VRAIMENT MALADE ?**

**QUELLES CONCLUSIONS PROPOSEZ-VOUS QUANT À LA COMMERCIALISATION OU NON DU TEST ?**





Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE »



## BAYES ET LA JUSTICE



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE » JUSTICE - ACTIVITÉ 7



## ACTIVITÉ 7 : « L'AFFAIRE SALLY CLARKE » (HISTOIRE VRAIE)

EN 1996 AU ROYAUME-UNI, LE NOUVEAU-NÉ DE SALLY CLARK DÉCÉDA AU BOUT DE DEUX SEMAINES. *BIS REPETITA* UN AN PLUS TARD, AVEC LA MORT DE SON SECOND NOUVEAU-NÉ. SALLY CLARK FUT POURSUIVIE EN JUSTICE POUR DOUBLE HOMICIDE. LE PÉDIATRE ROY MEADOW FUT AUDITIONNÉ. IL AFFIRMA QUE LA PROBABILITÉ D'UNE DOUBLE MORT INFANTILE PAR CAUSE NATURELLE ÉTAIT D'UN SUR 73 MILLIONS. CE TÉMOIGNAGE CONDAMNA SALLY CLARK.

→ QUE PENSEZ-VOUS DE CE VERDICT ?





Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE » JUSTICE - ACTIVITÉ 7



## RÉPONSE :

IL Y A CONFUSION, IL FAUT CALCULER LA PROBABILITÉ DE L'INNOCENCE DE SALLY CLARKE SACHANT QU'ELLE A PERDU 2 DE SES ENFANTS.



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE » JUSTICE - ACTIVITÉ 7



ON AJOUTE MAINTENANT QUE LE PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES *RAY HILL* DE *SALFORD UNIVERSITY* A EFFECTUÉ QUELQUES CALCULS APPROCHÉS QUI MONTRENT QUE LA PROBABILITÉ D'UNE DOUBLE MORT INFANTILE POUR CAUSES NATURELLES, BIEN QUE FAIBLE, DEMEURE 5 À 10 FOIS SUPÉRIEURE À CELLE D'UN DOUBLE HOMICIDE. SUITE À CELA, IL ÉVALUE LA PROBABILITÉ POUR QU'UNE PERSONNE AU HASARD AIT TUÉE SES DEUX NOUVEAU-NÉS A 1 SUR 500 MILLIONS.

→ **EN UTILISANT CES DONNÉS, APPLIQUER LA FORMULE DE BAYES POUR CALCULER LA PROBABILITÉ DE L'INNOCENCE DE *SALLY CLARK* SACHANT QUE SES DEUX NOUVEAU-NÉS SONT MORTS.**



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE » JUSTICE - ACTIVITÉ 7



LA PROBABILITÉ POUR QUE *SALLY CLARKE* SOIT UNE TUEUSE D'ENFANTS, DONC COUPABLE, EST ÉVALUÉE À  $1/5 \times 10^8$ .

PAR SUITE, LA PROBABILITÉ QU'ELLE SOIT INNOCENTE VAUT  $1 - 1/5 \times 10^8$ .

LA PROBABILITÉ POUR QUE LES DEUX ENFANTS DE *SALLY CLARKE* MEURT, SACHANT QU'ELLE EST INNOCENTE CORRESPOND À UNE MORT PAR CAUSE NATURELLE QUE L'ON ESTIME À  $1/73 \times 10^6$  SUIVANT LES CALCULS DE *ROY MEADOW*.



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE » JUSTICE - ACTIVITÉ 7



I : « SALLY CLARKE EST INNOCENTE » ET E2 : « LES 2 NOUVEAUX-NÉS SONT MORTS »

$$P(I|E_2) = \frac{P(E_2|I)P(I)}{P(E_2|I)P(I)+P(E_2|\bar{I})P(\bar{I})} = \frac{1/73 \cdot 10^6 \times (1 - 1/5 \cdot 10^8)}{1/73 \cdot 10^6 \times (1 - 1/5 \cdot 10^8) + 1 \times 1/5 \cdot 10^8} \simeq 0.8726$$



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE » JUSTICE - ACTIVITÉ 7



**ELLE AURAIT DÛ ÊTRE CONSIDÉRÉE COMME INNOCENTE À PLUS DE 87 % !!!**

TROIS ANS APRÈS SON PROCÈS, ON DÉCOUVRIT QUE LE DOCTEUR *ALAN WILLIAMS*, EN CHARGE DE L'AUTOPSIE, AVAIT MANQUÉ DE RAPPORTER LES CONCLUSIONS DE SON ANALYSE : LE SECOND ENFANT ÉTAIT BEL ET BIEN MORT DE CAUSE NATURELLE. *SALLY CLARK* FUT ENFIN LIBÉRÉE. MAIS NON SANS SÉQUELLES. ELLE SUBIT DE GRAVES TROUBLES PSYCHIATRIQUES ET MOURUT QUATRE ANS PLUS TARD PAR COMA ÉTHYLIQUE.



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE » JUSTICE - ACTIVITÉ 7



LE PROCÈS DE *SALLY CLARK* EST UN ÉCHEC CUISANT DE LA JUSTICE BRITANNIQUE. MAIS AU LIEU D'UNE PRISE DE CONSCIENCE DE L'IMPORTANCE DE LA FORMULE DE BAYES, CET ÉPISODE TRAGIQUE CONDUISIT AU CONTRAIRE À UNE MÉFIANCE ACCRUE DES STATISTIQUES. À TEL POINT QU'EN 2010, UN JUGE BRITANNIQUE ÉVINÇA LE THÉORÈME DE BAYES DES COURS DE JUSTICE.





Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE »



## BAYES ET LES JEUX



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE »

## JEUX - ACTIVITÉ 8



### ACTIVITÉ 8 : « LA ROULETTE AU CASINO »

TROIS THÉORIES CIRCULENT SUR LES ROULETTES.

T1 : LA ROULETTE EST FAUSSÉE DE TELLE SORTE

QU'ON OBTIENT ROUGE 60% DU TEMPS.

T2 : LA ROULETTE EST ÉQUILBRÉE.

T3 : LA ROULETTE EST FAUSSÉE DE TELLE SORTE

QU'ON OBTIENT NOIR 60% DU TEMPS.

T1	T2	T3
0,05	0,9	0,05







Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE »

## JEUX - ACTIVITÉ 8



JE ME METS À UNE TABLE DU CASINO, ET LA ROULETTE EST LANCÉE CINQ FOIS DE SUITE.

ON OBTIENT CINQ FOIS ROUGE.

JE ME POSE LA QUESTION SUIVANTE :

**« LES DEGRÉS DE CONFIANCE RENSEIGNÉS DANS LE TABLEAU ÉVOLUENT-ILS ? »**



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE »

## JEUX - ACTIVITÉ 8



B : « ON OBTIENT CINQ FOIS ROUGE ».

→ A L'AIDE DE LA FORMULE DE BAYES, ON PEUT CALCULER  $P_B(T1)$ ,  $P_B(T2)$  ET  $P_B(T3)$ .

→ ON DÉMONTRE AINSI QU'UNE FOIS QUE J'AI VU TOMBER CINQ FOIS LE ROUGE, MON NOUVEAU JUGEMENT EST QUE LA THÉORIE T2 EST ENVIRON 7 FOIS PLUS PROBABLE QUE T1, ET QUE LA THÉORIE T1 EST ENVIRON 8 FOIS PLUS PROBABLE QUE T3.





Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE »



## D'AUTRES DOMAINES D'APPLICATION



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE » ACTIVITÉ 9



## ACTIVITÉ 9 : « POURQUOI VOTRE ALARME SE DÉCLENCHE POUR RIEN ? »

LA PROBABILITÉ D'ÊTRE VICTIME D'UN CAMBRIOLAGE PENDANT VOS VACANCES EST DE 1%.

LA PROBABILITÉ QUE VOTRE ALARME SE DÉCLENCHE SACHANT QUE DES CAMBRIOLEURS SONT PRÉSENTS EST 99%.

LA PROBABILITÉ QUE L'ALARME SE DÉCLENCHE SANS RAISON EST DE 5%.

→ **VOTRE ALARME SE DÉCLENCHE, QUELLE EST LA PROBABILITÉ QUE CE SOIT POUR RIEN ?**



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE » ACTIVITÉ 9



$C$  : « LA PERSONNE EST VICTIME D'UN CAMBRIOLAGE »

$A$  : « L'ALARME SE DÉCLENCHE »

$$P(C) = 0,01 \quad P_C(A) = 0,99 \quad \text{et} \quad P(A \cap \bar{C}) = 0,05$$

ON COMPLÈTE LE TABLEAU PUIS ON CALCULE  $P_A(\bar{C})$

	$A$	$\bar{A}$	total
$C$			
$\bar{C}$			
total			





Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE »

## ACTIVITÉ 10



### ACTIVITÉ 10 : « UNE QUESTION PAR JOUR »

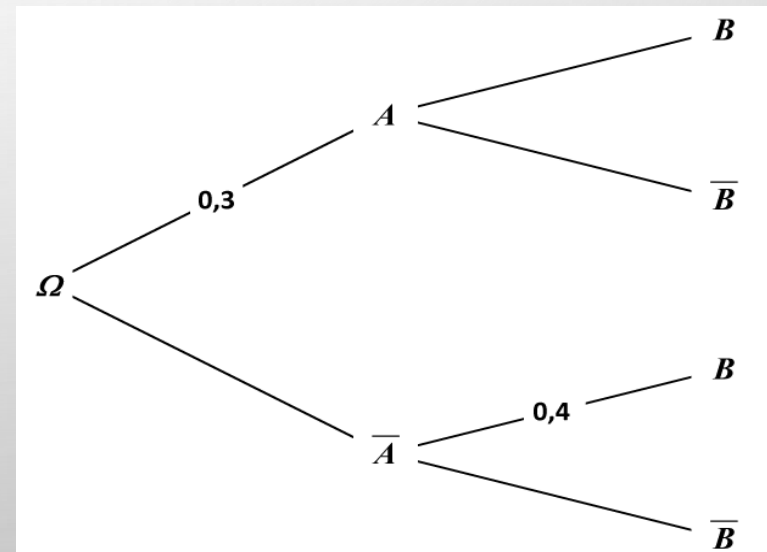
#### EXEMPLE 1

EN S'APPUYANT SUR L'ARBRE PONDÉRÉ CI-DESSOUS ET SACHANT QUE  $P(A \cap B) = 0,18$ , QUELLE EST LA VALEUR DE  $P_A(B)$  ?

1) 0,82

2) 0,6

3) 0,4





Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE »

## ACTIVITÉ 10



### EXEMPLE 2

LORS D'UN EXAMEN DE 2ÈME ANNÉE, 25% DES ÉTUDIANTS ÉCHOUENT EN BIOCHIMIE, 15% EN ANATOMIE ET 10% À LA FOIS EN ANATOMIE ET EN BIOCHIMIE.

SI UN ÉLÈVE A ÉCHOUÉ EN ANATOMIE, QUELLE EST LA PROBABILITÉ QU'IL N'ÉCHOUE PAS EN BIOCHIMIE ?

1)  $1/3$

2)  $1/4$

3) 0,75

4)  $2/3$

5) 0,15

D'APRÈS MÉDECINE LILLE 2007





Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE » ACTIVITÉ 11



## ACTIVITÉ 11 : « FACEBOOK SAIT »

ON CONSIDÉRERA POUR SIMPLIFIER, QU'IL Y A ACTUELLEMENT 200 000 000 USAGERS DE FACEBOOK.

FACEBOOK DISPOSE D'UNE LISTE DE 100 000 USAGERS QUI SONT DEUX FOIS PLUS SUSCEPTIBLES QUE L'USAGER TYPIQUE DE FACEBOOK D'ÊTRE DES TERRORISTES OU DES SOUTIENS DU TERRORISME. VOICI DONC LA THÉORIE FACEBOOK RÉSUMÉE DANS CE TABLEAU.

Sur la liste de Facebook	Pas sur la liste de Facebook
100 000	199 900 000





Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE » ACTIVITÉ 11



IL S'AVÈRE QUE VOTRE VOISIN DE PALLIER A ÉTÉ IDENTIFIÉ PAR FACEBOOK COMME SUSPECT ÉVENTUEL, UNE « PERSON OF INTEREST ». PAR AILLEURS , LA POLICE FÉDÉRALE ESTIME DE SON CÔTÉ QU'UN USAGER SUR VINGT MILLE DOIT ÊTRE SURVEILLÉ.

L'ALGORITHME DE FACEBOOK EST SI BON QUE LES GENS QU'IL A MARQUÉS SONT VRAIMENT DEUX FOIS PLUS SUSCEPTIBLES QUE L'USAGER MOYEN D'ÊTRE DES TERRORISTES.

DONC DANS LE GROUPE DE 100 000 PERSONNES ANNONCÉS PAR LES FACEBOOK, 1 SUR 10 000 , SOIT 10 PERSONNES SONT RÉELLEMENT SUSCEPTIBLES D'ÊTRE DES TERRORISTES ET DONC 99 990 NE LE SONT PAS.



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE »

## ACTIVITÉ 11



COMPLÉTER LE TABLEAU SUIVANT :

	Sur la liste Facebook	Pas sur la liste Facebook	Total
Potentiel terroriste			
Pas un potentiel terroriste			
Total			



Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE » ACTIVITÉ 11



## QUESTION 1 :

QUELLES SONT LES CHANCES QUE QUELQU'UN SOIT SUR LA LISTE DE FACEBOOK ALORS QU'IL N'EST PAS UN POTENTIEL TERRORISTE ?

## QUESTION 2 :

QUELLES SONT LES CHANCES QUE QUELQU'UN NE SOIT PAS UN POTENTIEL TERRORISTE ALORS QU'IL EST SUR LA LISTE DE FACEBOOK ?

→ **QUELLE EST LA QUESTION À SE POSER, POUR DÉTERMINER À POSTÉRIORI, LA PROBABILITÉ QUE VOTRE VOISIN SOIT UN TERRORISTE ?**





Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE » ACTIVITÉ 12



## ACTIVITÉ 12 : « LE FILTRAGE DES SPAMS »

ON FAIT L'HYPOTHÈSE QUE LE MESSAGE EST UN SPAM.

UN ALGORITHME FAIT DES OBSERVATIONS SUR LE CONTENU DU MESSAGE (EXPÉDITEUR, MOTS EMPLOYÉS, PRÉSENCE DE LIENS,.....)

GRÂCE À LA FORMULE DE BAYES, L'ALGORITHME MET À JOUR SON ESTIMATION DE LA PROBABILITÉ QUE LE MESSAGE SOIT UN SPAM.

EN FONCTION DE LA VALEUR DE LA PROBABILITÉ À POSTERIORI, IL PEUT DÉCIDER DE CLASSER OU NON LE MESSAGE COMME SPAM.





Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# « L'INFÉRENCE BAYÉSIENNE »

## ACTIVITÉ 12



### ACTIVITÉ 12 : « LE FILTRAGE DES SPAMS »

ON FAIT L'HYPOTHÈSE QUE LE MESSAGE EST UN SPAM.

UN ALGORITHME FAIT DES OBSERVATIONS SUR LE CONTENU DU MESSAGE (EXPÉDITEUR, MOTS EMPLOYÉS, PRÉSENCE DE LIENS,.....)

GRÂCE À LA FORMULE DE BAYES, L'ALGORITHME MET À JOUR SON ESTIMATION DE LA PROBABILITÉ QUE LE MESSAGE SOIT UN SPAM.

EN FONCTION DE LA VALEUR DE LA PROBABILITÉ À POSTÉRIORI, IL PEUT DÉCIDER DE CLASSER OU NON LE MESSAGE COMME SPAM.





Région académique  
HAUTS-DE-FRANCE



# COMPLÉMENTS



- LIEN : [HTTPS://PADLET.COM/MATHSPCWALLON/VJPWHNMSV968](https://padlet.com/mathspcwallon/vjpwHNMSV968)
- **BIBLIOGRAPHIE POUR LES ENSEIGNANTS :**
  - LA FORMULE DU SAVOIR DE LÊ NGUYÊN HOANG. ED EDP SCIENCES MAI 2018
  - L'ART DE NE PAS DIRE N'IMPORTE QUOI, CE QUE LE BON SENS DOIT AUX MATHÉMATIQUES DE JORDAN ELLENBERG. ED. CASSINI NOV. 2018
- **BIBLIOGRAPHIE POUR LES ÉLÈVES :**
  - LES MATHS AU TRIBUNAL DE LEILA SCHNEPS ET CORALIE COLMEZ ED. SEUIL SEPT 2015
  - STATISTIQUES, MÉFIEZ-VOUS. DE NICOLAS GAUVRIT ED. ELLIPSES POCHE FÉVR. 2014



L'ATELIER A ÉTÉ CONSTRUIT EN COLLABORATION AVEC DES **UNIVERSITAIRES**,  
DES **PROFESSEURS DE CPGE** ET DES **PROFESSEURS DE LYCÉE** :

G. BIANCHI, J-P BONNET, C. CAELEN, G. CASTELLAN, G. DEQUIEDT, C. MAGNIER,  
F. PLUSKOTA, F. VANTROYS.



**MERCI POUR VOTRE ÉCOUTE ET PARTICIPATION !**