Cahier de vacances
Classe de 3^{e}

Corrigés

Académie Lille

Table des matières

Le théorème de Pythagore

Je m'exerce

Exercice 1

1. Comme le triangle ABC est rectangle en A, alors l'hypoténuse est le côté $[BC]$.
2. Dans le triangle CAB rectangle en A, le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$\begin{aligned} CB^2 &= CA^2 + AB^2 \\ 13^2 &= CA^2 + 12^2 \\ 169 &= CA^2 + 144 \\ CA^2 &= 169 - 144 \\ CA^2 &= 25 \\ CA &= 5 \text{ cm} \end{aligned}$$

Exercice 2

1. On sait que $[BC]$ est le plus grand côté. Donc si le triangle ABC est rectangle, ce ne sera ni en B ni en C.
2. Dans le triangle BAC, $[BC]$ est le plus grand côté.

$$\begin{array}{c|ccc} BC^2 & BA^2 & + & AC^2 \\ 15^2 & 9^2 & + & 12^2 \\ & 81 & + & 144 \\ 225 & & 225 & \end{array}$$

Comme $BC^2 = BA^2 + AC^2$, alors le triangle BAC est rectangle en A d'après la réciproque du théorème de Pythagore.

Exercice 3

1. Dans le triangle AEZ rectangle en E, le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$\begin{aligned} AZ^2 &= AE^2 + EZ^2 \\ AZ^2 &= 5^2 + 6^2 \\ AZ^2 &= 25 + 36 \\ AZ^2 &= 61 \\ AZ &= \sqrt{61} \\ AZ &\approx 7{,}8 \text{ cm} \end{aligned}$$

2. Dans le triangle TRY rectangle en R, le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$\begin{aligned} TY^2 &= TR^2 + RY^2 \\ 14^2 &= TR^2 + 12^2 \\ 196 &= TR^2 + 144 \\ TR^2 &= 196 - 144 \\ TR^2 &= 52 \\ TR &= \sqrt{52} \\ TR &\approx 7{,}21 \text{ dm} \end{aligned}$$

Exercice 4

- Dans le triangle ABC rectangle en B, le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ AC^2 &= 6^2 + 9^2 \\ AC^2 &= 36 + 81 \\ AC^2 &= 117 \\ AC &= \sqrt{117} \\ AC &\approx 10{,}82 \text{ cm} \end{aligned}$$

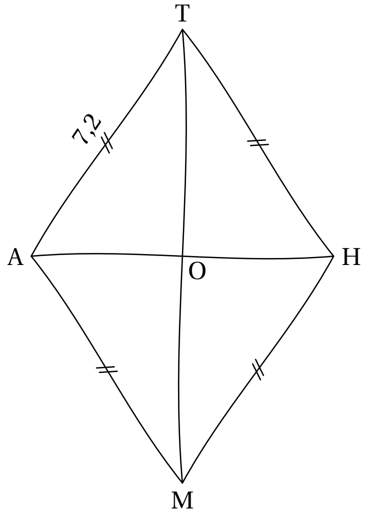
- Comme le triangle AHC est rectangle en C, alors le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$\begin{aligned} AH^2 &= AC^2 + HC^2 \\ AH^2 &= 117 + 2^2 \\ AH^2 &= 117 + 4 \\ AH^2 &= 121 \\ AH &= \sqrt{121} \\ AH &= 11 \text{ cm} \end{aligned}$$

On utilise AC^2 du calcul précédent.

Enigme 1

1.

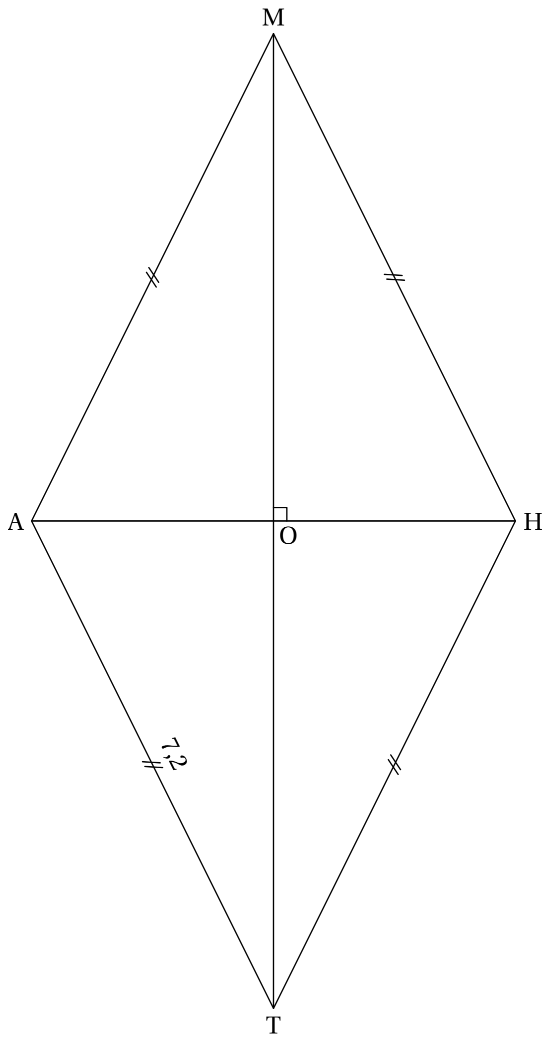


2. Comme $MATH$ est un losange de centre O, alors O est le milieu des diagonales et les diagonales sont perpendiculaires.
Dans le triangle MOA rectangle en O, le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$\begin{aligned} MA^2 &= MO^2 + OA^2 \\ 7{,}2^2 &= MO^2 + 3{,}2^2 \\ 51{,}84 &= MO^2 + 10{,}24 \\ MO^2 &= 51{,}84 - 10{,}24 \\ MO^2 &= 41{,}6 \\ MO &= \sqrt{41{,}6} \\ MO &\approx 6{,}45 \text{ cm} \end{aligned}$$

Par conséquent, $MT = 2 \times MO \approx 13{,}9$ cm.

3.



Enigme 2

1. Les deux longueurs du rectangle représentent 14 cm. Il reste 4 cm pour compléter les 18 cm du périmètre. Donc les deux largeurs représentent 4 cm, soit 2 cm pour une largeur.
2. Appelons $ABCD$ ce rectangle avec $AB = 7$ cm et $BC = 2$ cm.
Dans le triangle ABC rectangle en B, le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ AC^2 &= 2^2 + 7^2 \\ AC^2 &= 4 + 49 \\ AC^2 &= 53 \\ AC &= \sqrt{53} \\ AC &\approx 7{,}28 \text{ cm} \end{aligned}$$

Enigme 3

On va essayer de construire un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure $\sqrt{5}$ cm. Le nombre $\sqrt{5}$ fait penser au théorème de Pythagore. Prenons alors un triangle ABC, rectangle en A. Par conséquent, on doit avoir :

$$
\begin{aligned}
BC^2 &= BA^2 + AC^2 && (1)\\
&\dots\dots && (2)\\
&\dots\dots && (3)\\
&\dots\dots && (4)\\
BC &= \sqrt{5} && (5)
\end{aligned}
$$

À la ligne (5), par analogie avec les calculs complets déjà faits, nous devons mettre $BC^2 = 5$. Ce qui donne :

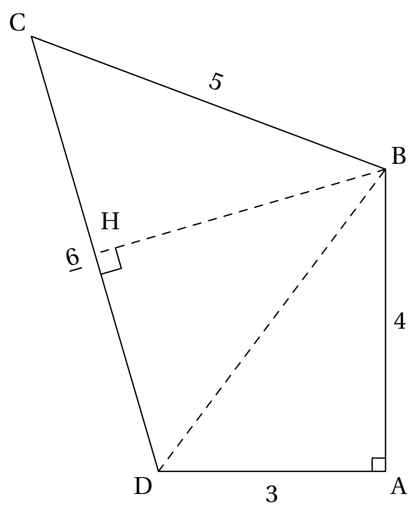
$$
\begin{aligned}
BC^2 &= BA^2 + AC^2 && (6)\\
& && (7)\\
& && (8)\\
BC^2 &= 5 && (9)\\
BC &= \sqrt{5} && (10)
\end{aligned}
$$

À la ligne (4), nous devons écrire 5 sous la forme d'une somme.

$$
\begin{aligned}
BC^2 &= BA^2 + AC^2 && (11)\\
& && (12)\\
BC^2 &= \dots + \dots && (13)\\
BC^2 &= 5 && (14)\\
BC &= \sqrt{5} && (15)
\end{aligned}
$$

Il y a énormément de possibilités, mais les termes de cette somme doivent provenir de deux carrés. Comment alors décomposer 5 sous la forme d'une somme de deux carrés ? Une solution simple est $5 = 1 + 4 = 1^2 + 2^2$.
Pour construire un segment de longueur $\sqrt{5}$, on construit un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 1 cm et 2 cm.

Enigme 4



On complète la figure en nommant les sommets. On fait ainsi apparaître un triangle rectangle en A lorsqu'on trace le segment $[BD]$.
Dans le triangle DAB rectangle en A, le théorème de Pythagore permet d'écrire :

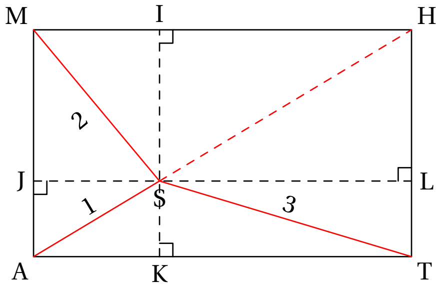
$$
\begin{aligned}
DB^2 &= DA^2 + AB^2\\
DB^2 &= 3^2 + 4^2\\
DB^2 &= 9 + 16\\
DB^2 &= 25\\
DB &= 5 \text{ cm}
\end{aligned}
$$

Par conséquent, le triangle BCD est isocèle en B et la hauteur issue de B coupe le segment $[CD]$ en son milieu. Si H est ce milieu, alors $DH = 3$ cm. Les triangles BHD et BAD sont donc égaux et $BH = 4$ cm.
On peut donc déterminer l'aire du quadrilatère $ABCD$ en écrivant :

$$
\begin{aligned}
\text{Aire}_{ABCD} &= \text{Aire}_{ABD} + \text{Aire}_{BCD}\\
\text{Aire}_{ABCD} &= \frac{AD \times AB}{2} + \frac{CD \times BH}{2}\\
\text{Aire}_{ABCD} &= \frac{3 \times 4}{2} + \frac{6 \times 4}{2}\\
\text{Aire}_{ABCD} &= \frac{12}{2} + \frac{24}{2}\\
\text{Aire}_{ABCD} &= 6 + 12\\
\text{Aire}_{ABCD} &= 18 \text{ cm}^2
\end{aligned}
$$

Enigme 5

On complète la figure en faisant apparaître les points I, J, K, L.



On a donc $MJ = SI$, $AK = SJ$ et $KT = IH$.

Comme le triangle SIH est rectangle en I, alors le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$SH^2 = SI^2 + IH^2 \quad (16)$$

Comme le triangle SJM est rectangle en J, alors le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$\begin{aligned} SM^2 &= SJ^2 + SI^2 \\ 2^2 &= SJ^2 + SI^2 \\ 4 &= SJ^2 + SI^2 \quad (17) \end{aligned}$$

Comme le triangle SKA est rectangle en K, alors le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$\begin{aligned} SA^2 &= SK^2 + SJ^2 \\ 1^2 &= SK^2 + SJ^2 \\ 1 &= SK^2 + SJ^2 \quad (18) \end{aligned}$$

Comme le triangle STK est rectangle en K, alors le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$\begin{aligned} ST^2 &= SK^2 + IH^2 \\ 3^2 &= SK^2 + IH^2 \\ 9 &= SK^2 + IH^2 \quad (19) \end{aligned}$$

En ajoutant les égalités 17 et 19, on a :

$$13 = SK^2 + SJ^2 + SI^2 + IH^2$$

Or, d'après l'égalité 18, on sait que $SK^2 + SJ^2 = 1$. Donc on obtient :

$$\begin{aligned} 13 &= 1 + SI^2 + IH^2 \\ 12 &= SI^2 + IH^2 \end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant l'égalité 16, on a :

$$\begin{aligned} SH^2 &= 12 \\ SH &= \sqrt{12} \end{aligned}$$

Calculs fractionnaires

Je m'exerce

Exercice 1

$A = \frac{3}{8} + \frac{2}{5}$

$A = \frac{15}{40} + \frac{16}{40}$

$A = \frac{31}{40}$

$B = \frac{4}{7} - \frac{8}{5}$

$B = \frac{20}{35} - \frac{56}{35}$

$B = \frac{-36}{35}$

$C = \frac{3}{5} \times \frac{7}{11}$

$C = \frac{21}{55}$

$D = \frac{3}{5} \div \frac{7}{11}$

$D = \frac{3}{5} \times \frac{11}{7}$

$D = \frac{33}{35}$

Exercice 2

$E = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$

$E = \frac{1}{3} + \frac{6}{20}$

$E = \frac{1}{3} + \frac{3}{10}$

$E = \frac{10}{30} + \frac{9}{30}$

$E = \frac{19}{30}$

$F = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right) \times \frac{3}{4}$

$F = \left(\frac{5}{15} + \frac{6}{15}\right) \times \frac{3}{4}$

$F = \frac{11}{15} \times \frac{3}{4}$

$F = \frac{11 \times 3}{3 \times 5 \times 4}$

$F = \frac{11}{20}$

Exercice 3

1. On calcule ce que représente les parts des trois premières personnes :

$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$

$\frac{3}{12} + \frac{4}{12} + \frac{1}{5}$

$\frac{7}{12} + \frac{1}{5}$

$\frac{35}{60} + \frac{12}{60}$

$\frac{47}{60}$

Il reste donc $\frac{60}{60} - \frac{47}{60} = \frac{13}{60}$

2. On représente cette proportion $\frac{13}{60}$ par un tableau de proportionnalité :

Part de la 4ᵉ personne	13	117
Nombre de pièces d'or	60	

Comme $117 = 9 \times 13$, on complète le tableau :

Part de la 4ᵉ personne	13	117
Nombre de pièces d'or	60	

×9

×9

Comme $60 \times 9 = 540$, il y a donc 540 pièces dans le trésor.

3. On utilise la répartition donnée dans l'énoncé :

1ʳᵉ personne $\frac{1}{4}$ de 540 représente $540 \div 4 = 135$ pièces.

2ᵉ personne $\frac{1}{3}$ de 540 représente $540 \div 3 = 180$ pièces d'or.

3ᵉ personne $\frac{1}{5}$ de 540 représente $540 \div 5 = 108$ pièces d'or.

Je cherche, je raisonne

Enigme 1

Utilisons le conseil de l'énoncé :

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$$
$$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{4}{12}-\frac{3}{12}=\frac{1}{12}$$
$$\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{5}{20}-\frac{4}{20}=\frac{1}{20}$$
$$\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{6}{30}-\frac{5}{30}=\frac{1}{30}$$
$$\frac{1}{6}-\frac{1}{7}=\frac{7}{42}-\frac{6}{42}=\frac{1}{42}$$
$$\frac{1}{7}-\frac{1}{8}=\frac{8}{56}-\frac{7}{56}=\frac{1}{56}$$
$$\frac{1}{8}-\frac{1}{9}=\frac{9}{72}-\frac{8}{72}=\frac{1}{72}$$
$$\frac{1}{9}-\frac{1}{10}=\frac{10}{90}-\frac{9}{90}=\frac{1}{90}$$

On va donc pouvoir calculer S :

$$S=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}$$
$$S=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}$$
$$S=\frac{1}{2}-\frac{1}{10}$$
$$S=\frac{5}{10}-\frac{1}{10}$$
$$S=\frac{4}{10}$$
$$S=\frac{2}{5}$$

Enigme 2

1. On va calculer $A=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{30}$:

$$A=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{30}$$
$$A=\frac{6}{30}+\frac{5}{30}+\frac{1}{30}$$
$$A=\frac{12}{30}$$
$$A=\frac{12_{\div 6}}{30_{\div 6}}$$
$$A=\frac{2}{5}$$

2. Avec le calcul ci-dessous, on peut écrire l'égalité :

$$\frac{1}{5}=\frac{1}{6}+\frac{1}{30}$$

6 est le suivant de 5 et $30=5\times 6$. Essayons de généraliser : l'égalité

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$$

est-elle vraie *pour toutes les valeurs de n* ? Si on appelle B l'expression $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n(n+1)}$, alors on a :

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}\\
B &= \frac{n}{n(n+1)}+\frac{1}{n(n+1)}\\
B &= \frac{n+1}{n(n+1)}\\
B &= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

L'égalité est vraie pour toutes les valeurs de n. Utilisons la pour décomposer $\dfrac{3}{7}$:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{7} &= \frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\\
\frac{3}{7} &= \frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{7\times 8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{7\times 8}\\
\frac{3}{7} &= \frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{56}+\frac{1}{8}+\frac{1}{56}\\
\frac{3}{7} &= \frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{56}+\frac{1}{9}+\frac{1}{8\times 9}+\frac{1}{57}+\frac{1}{56\times 57}\\
\frac{3}{7} &= \frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{56}+\frac{1}{9}+\frac{1}{72}+\frac{1}{57}+\frac{1}{3\,192}
\end{aligned}$$

Enigme 3

$$\begin{aligned}
\frac{a}{12}-\frac{b}{21} &= \frac{1}{2}\\
\frac{7a}{84}-\frac{4b}{84} &= \frac{1}{2}\\
\frac{7a-4b}{84} &= \frac{1}{2}\\
7a-4b &= \frac{84}{2}\\
7a-4b &= 42
\end{aligned}$$

Les puissances

Je m'exerce

Exercice 1

Il y a $3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27$ menus possibles.

Exercice 2

$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\,000$$

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{10 \times 10} = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

$$(-5)^4 = (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = 625$$

Exercice 3

Temps écoulé (h)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nombre de cellules	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024	2 048	4 096

À minuit, Elsa observera pour la première fois plus de 4 000 cellules.

Exercice 4

$$5^3 \times 5^7 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^{10}$$

$$3^8 \times 3^{-10} = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times \frac{1}{3^{10}}$$

$$3^8 \times 3^{-10} = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times \frac{1}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}$$

$$3^8 \times 3^{-10} = \frac{1}{3 \times 3}$$

$$3^8 \times 3^{-10} = \frac{1}{3^2}$$

$$3^8 \times 3^{-10} = 3^{-2}$$

$$4^{-3} \times 4^{-7} = \frac{1}{4^3} \times \frac{1}{4^7}$$

$$4^{-3} \times 4^{-7} = \frac{1}{4 \times 4 \times 4} \times \frac{1}{4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4}$$

$$4^{-3} \times 4^{-7} = \frac{1}{4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4}$$

$$4^{-3} \times 4^{-7} = \frac{1}{4^{10}}$$

$$4^{-3} \times 4^{-7} = 4^{-10}$$

$$\frac{7^{13}}{7^5} = \frac{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7}{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7}$$

$$\frac{7^{13}}{7^5} = 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$$

$$\frac{7^{13}}{7^5} = 7^8$$

$$\frac{(-6)^2}{(-6)^5} = \frac{(-6)\times(-6)}{(-6)\times(-6)\times(-6)\times(-6)\times(-6)}$$
$$\frac{(-6)^2}{(-6)^5} = \frac{1}{(-6)\times(-6)\times(-6)}$$
$$\frac{(-6)^2}{(-6)^5} = \frac{1}{(-6)^3}$$
$$\frac{(-6)^2}{(-6)^5} = (-6)^{-3}$$

$$\frac{9^{-2}}{9^7} = 9^{-2}\times\frac{1}{9^7}$$
$$\frac{9^{-2}}{9^7} = \frac{1}{9^2}\times\frac{1}{9^7}$$
$$\frac{9^{-2}}{9^7} = \frac{1}{9\times 9}\times\frac{1}{9\times 9\times 9\times 9\times 9\times 9\times 9}$$
$$\frac{9^{-2}}{9^7} = \frac{1}{9\times 9\times 9\times 9\times 9\times 9\times 9\times 9\times 9}$$
$$\frac{9^{-2}}{9^7} = \frac{1}{9^9}$$
$$\frac{9^{-2}}{9^7} = 9^{-9}$$

$$5^2\times 3^2 = 5\times 5\times 3\times 3$$
$$5^2\times 3^2 = 5\times 3\times 5\times 3$$
$$5^2\times 3^2 = 15\times 15$$
$$5^2\times 3^2 = 15^2$$

$$\frac{14^3}{21^3} = \frac{14\times 14\times 14}{21\times 21\times 21}$$
$$\frac{14^3}{21^3} = \frac{14}{21}\times\frac{14}{21}\times\frac{14}{21}$$
$$\frac{14^3}{21^3} = \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$$
$$\frac{14^3}{21^3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

Exercice 5

$7\,300\,\text{t} = 7\,300\times 10^3\,\text{kg} = 7{,}3\times 10^6\,\text{kg}$.
On calcule le nombre d'atomes :

$$\frac{7{,}3\times 10^6}{9{,}352\times 10^{-26}} = \frac{7{,}3}{9{,}352}\times\frac{10^6}{10^{-26}}$$

Or,

$$\frac{10^6}{10^{-26}} = 10^6\times\frac{1}{10^{-26}} = 10^6\times 10^{26} = 10^{32}$$

Comme $\frac{7{,}3}{9{,}352}\approx 0{,}8$, alors il y a environ $0{,}8\times 10^{32} = 8\times 10^{31}$ atomes de fer dans la structure.

Exercice 6

Nom de la planète	Masse en kg	Écriture scientifique
Mercure	33×10^{22}	$3{,}3\times 10^{23}$
Vénus	$4{,}87\times 10^{24}$	$4{,}87\times 10^{24}$
Terre	598×10^{22}	$5{,}98\times 10^{24}$
Mars	$6\,418\times 10^{20}$	$6{,}418\times 10^{23}$
Jupiter	$1\,900\times 10^{24}$	$1{,}9\times 10^{27}$
Saturne	57×10^{25}	$5{,}7\times 10^{26}$
Uranus	866×10^{23}	$8{,}66\times 10^{25}$
Neptune	$10{,}3\times 10^{25}$	$1{,}03\times 10^{26}$

Dans l'ordre croissant des masses, on a :

Mercure – Mars – Vénus – Terre – Uranus – Neptune – Saturne – Jupiter

Exercice 7

1. $15 \times 10^9 = 1{,}5 \times 10^{10}$
2. 3×10^5 km.
3. $149{,}5 \times 10^6$ km $= 1{,}495 \times 10^8$ km
4. $3{,}844 \times 10^5$ km

Exercice 8

$$A = 15 \times 10^2 \times 4 \times 10^{-6} = 15 \times 4 \times 10^2 \times 10^{-6} = 60 \times 10^{-4} = 6 \times 10^{-3}$$

$$B = (2\,500\,000\,000)^2 = \left(2{,}5 \times 10^9\right)^2 = 2{,}5 \times 10^9 \times 2{,}5 \times 10^9 = 2{,}5 \times 2{,}5 \times 10^9 \times 10^9 = 6{,}25 \times 10^{18}$$

$$C = \frac{36 \times 10^7}{3 \times 10^5} = \frac{36}{3} \times \frac{10^7}{10^5} = 12 \times 10^2 = 1{,}2 \times 10^3$$

Je cherche, je raisonne

Enigme 1

$$A = \frac{2^5 \times 4^5 \times 11^{-3}}{8^{-3} \times 11^5} = \frac{8^5 \times 11^{-3}}{8^{-3} \times 11^5} = 8^8 \times 11^{-8}$$

$$B = \frac{6^{-3} \times (-5)^7 \times 4^7}{10^5 \times 2^5 \times (-6)^5} = \frac{6^{-3} \times (-5)^7 \times 4^7}{2^5 \times 5^5 \times 2^5 \times (-6)^5} = \frac{6^{-8} \times 20^7}{20^5} = 6^{-8} \times 20^2$$

Enigme 2

On considère un nombre entier positif n non nul.
Dans le nombre 2^n :

- si le reste de la division euclidienne de n par 4 est 0, le dernier chiffre de 2^n est 6.
- si le reste de la division euclidienne de n par 4 est 1, le dernier chiffre de 2^n est 2.
- si le reste de la division euclidienne de n par 4 est 2, le dernier chiffre de 2^n est 4.
- si le reste de la division euclidienne de n par 4 est 3, le dernier chiffre de 2^n est 8.

Or, $2\,020 = 505 \times 4 + 0$. Donc le dernier chiffre de 2^{2020} est 6.

La proportionnalité

Je m'exerce

Exercice 1

1.

Capacité débitée (L)	16	500
Temps (min)	1	

$\div 16$

Le remplissage va durer $500 \div 16 = 31,25$ min soit 31 min 15 s.

2.

Jus de fruits (cL)	100	20
Ananas (cL)	15	

$\div 5$; $\div 5$

Dans 20 cL de ce jus de fruits, il y a 15 cL $\div$ 5 = 3 cL d'ananas.

3.

Nombre total d'élèves	100	40
Nombre de voix obtenues	30	

$\times 0,4$; $\times 0,4$

L'élève a obtenu 12 voix.

Exercice 2

1.

distance (km)	120	20
durée (h)	1	

$\div 6$; $\div 6$

Il reste 1 h $\div$ 6, soit 60 min $\div$ 6 = 10 min avant d'arriver à cette aire.

2.

Taille sur la carte (cm)	1	3,7
Taille réelle (cm)	2 500	

$\times 2\,500$

La longueur réelle de cette rue est $3,7 \times 2\,500 = 9\,250$ cm soit 92,50 m.

3. Il s'agit d'une augmentation de 8 % donc le nouveau nombre d'habitants est :

$$1\,250 \times \left(1 + \frac{8}{100}\right) = 1\,250 \times (1 + 0,08) = 1\,250 \times 1,08 = 1\,350$$

Actuellement, il y a 1 350 habitants dans cette ville.

Je cherche, je raisonne

Enigme 1

1re partie du trajet

distance (km)	80	
durée (min)	60	15

$\div 4$; $\div 4$

Il a roulé 20 km.

2e partie du trajet

distance (km)	120	
durée (min)	60	105

$\times 2$

Il a roulé 210 km.

Donc il a effectué un parcours de 210 km + 20 km = 230 km en 15 min + 1 h 45 min = 2 h, soit une vitesse moyenne de 115 km/h.

Enigme 2

1. Pour 7,5 km, le client va payer : 7,5 × 1 € + 5 € = 7,50 € + 5 € = 12,50 €.
   Pour 15 km, le client va payer : 15 × 2 € − 5 € = 30 € − 5 € = 25 €.
   Pour 22,5 km, le client va payer : 22,5 × 1 € + 15 € = 22,50 € + 15 € = 37,50 €.
2. Il *semble* y avoir proportionnalité entre le nombre de kilomètres parcourus et le prix payé. Mais pour 30 km : 30 × 1 € + 15 € = 45 €.

Distance (en km)	7,5	15	22,5	30
Prix (en €)	12,50	25	37,50	45

Enigme 3

1. Incorrect. Car la somme à payer étant proportionnelle à la taille de l'appartement, le prix d'un mètre carré sera le même pour tous les occupants de cet immeuble.
2. Correct. En utilisant un tableau de proportionnalité.
3. Incorrect. Il faudrait connaître au moins la superficie d'un des appartements.
4. Correct. Car la somme à payer est proportionnelle à la taille de l'appartement.

Enigme 4

1. (a) Homer va choisir le traitement B, il a davantage de réussite.

   (b) **Traitement A**

Nombre de patients	350	100
Nombre de guérisons	273	

   On obtient donc un pourcentage de (273 × 100) ÷ 350 = 78 %.

   Traitement B

Nombre de patients	350	100
Nombre de guérisons	289	

   On obtient donc un pourcentage de (289 × 100) ÷ 350 ≈ 82,6 %.

2. (a) **Traitement A - Petits calculs**

Nombre de patients	87	100
Nombre de guérisons	81	

   On obtient donc un pourcentage de (81 × 100) ÷ 87 ≈ 93,1 %.

   Traitement A - Gros calculs

Nombre de patients	263	100
Nombre de guérisons	192	

   On obtient donc un pourcentage de (192 × 100) ÷ 263 ≈ 73 %.

   Traitement B - Petits calculs

Nombre de patients	270	100
Nombre de guérisons	234	

   On obtient donc un pourcentage de (234 × 100) ÷ 270 ≈ 86,7 %.

   Traitement B - Gros calculs

Nombre de patients	80	100
Nombre de guérisons	55	

   On obtient donc un pourcentage de (55 × 100) ÷ 80 = 68,8 %.

(b) Le traitement A est meilleur !

Cet exercice illustre le paradoxe d'*Edward Simpson*, statisticien anglais (1922-2019).

Le théorème de Thalès

Je m'exerce

Exercice 1

Dans le triangle HBE, M est un point de la droite (HB), P est un point de la droite (HE).

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{HM}{HB}=\dfrac{2{,}4}{1{,}8}=\dfrac{2{,}4\times10}{1{,}8\times10}=\dfrac{24}{18}=\dfrac{24\times2}{18\times2}=\dfrac{48}{36}\\[2ex]\dfrac{HP}{HE}=\dfrac{1{,}6}{1{,}2}=\dfrac{1{,}6\times10}{1{,}2\times10}=\dfrac{16}{12}=\dfrac{16\times3}{12\times3}=\dfrac{48}{36}\end{array}\right\}\dfrac{HM}{HB}=\dfrac{HP}{HE}$$

De plus, les points H, M, B sont alignés dans le même ordre que les points H, P, E. Donc les droites (MP) et (BE) sont parallèles d'après la réciproque du théorème de Thalès.

Exercice 2

Dans le triangle ABC, D est un point de la droite (AB), E est un point de la droite (AC).
Comme les droites (DE) et (BC) sont parallèles, alors le théorème de Thalès permet d'écrire :

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

On remplace par les longueurs connues :

$$\frac{5}{7}=\frac{AE}{8}=\frac{DE}{BC}$$

$$AE=\frac{8\times5}{7}$$
$$AE=\frac{40}{7}$$
$$AE\approx5{,}7\text{ cm}$$

Exercice 3

•Dans le triangle EFI rectangle en F, le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$\begin{aligned}EI^2&=EF^2+FI^2\\6^2&=EF^2+4{,}8^2\\36&=EF^2+23{,}04\\EF^2&=36-23{,}04\\EF^2&=12{,}96\\EF&=\sqrt{12{,}96}\\EF&=3{,}6\text{ cm}\end{aligned}$$

•Comme les droites (EF) et (HG) sont toutes les deux perpendiculaires à la même droite (FG), alors les droites (EF) et (HG) sont parallèles.
•Dans le triangle IHG, E est un point de la droite (IH), F est un point de la droite (IG).
Comme les droites (EF) et (HG) sont parallèles, alors le théorème de Thalès permet d'écrire :

$$\frac{IE}{IH}=\frac{IF}{IG}=\frac{EF}{HG}$$

On remplace par les longueurs connues :

$$\frac{6}{10}=\frac{4{,}8}{IG}=\frac{3{,}6}{HG}$$

$$IG = \frac{4{,}8 \times 10}{6}$$
$$IG = \frac{48}{6}$$
$$IG = 8 \text{ cm}$$

$$HG = \frac{3{,}6 \times 10}{6}$$
$$HG = \frac{36}{6}$$
$$HG = 6 \text{ cm}$$

Exercice 4

Il faut d'abord calculer OM et ON.
Comme O appartient au segment $[BM]$, alors $OM = BM - OB = 10$ cm $- 2{,}5$ cm $= 7{,}5$ cm.
Comme O appartient au segment $[AN]$, alors $ON = AN - OA = 6$ cm $- 1{,}5$ cm $= 4{,}5$ cm.
Dans le triangle OAB, N est un point de la droite (OA), M est un point de la droite (OB).

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{ON}{OA} = \dfrac{1{,}5}{4{,}5} = \dfrac{1{,}5 \times 10}{4{,}5 \times 10} = \dfrac{15}{45} = \dfrac{15 \times 5}{45 \times 5} = \dfrac{75}{225} \\[2ex] \dfrac{OM}{OB} = \dfrac{2{,}5}{7{,}5} = \dfrac{2{,}5 \times 10}{7{,}5 \times 10} = \dfrac{25}{75} = \dfrac{25 \times 3}{75 \times 3} = \dfrac{75}{225} \end{array}\right\} \dfrac{ON}{OA} = \dfrac{OM}{OB}$$

De plus, les points O, N, A sont alignés dans le même ordre que les points O, M, B. Donc les droites (NM) et (AB) sont parallèles d'après la réciproque du théorème de Thalès.

Je cherche, je raisonne

Enigme 1

• Dans le triangle GBC, F est un point de la droite (GB), E est un point de la droite (GC).
Comme les droites (FE) et (BC) sont parallèles, alors le théorème de Thalès permet d'écrire :

$$\frac{GF}{GB} = \frac{GE}{GC} = \frac{FE}{BC}$$

On remplace par les longueurs connues :

$$\frac{GF}{GB} = \frac{10}{6} = \frac{15}{BC}$$

$$BC = \frac{15 \times 6}{10}$$
$$BC = \frac{90}{10}$$
$$BC = 9 \text{ cm}$$

• La longueur AE mesure 12 cm + 6 cm + 10 cm = 28 cm.
Dans le triangle ADE, B est un point de la droite (AD), C est un point de la droite (AE).
Comme les droites (BC) et (DE) sont parallèles, alors le théorème de Thalès permet d'écrire :

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

On remplace par les longueurs connues :

$$\frac{AB}{AD} = \frac{9}{DE} = \frac{12}{28}$$

$$DE = \frac{9 \times 28}{12}$$
$$DE = \frac{252}{12}$$
$$DE = 21 \text{ cm}$$

Enigme 2

• Dans le triangle BAF, R est un point de la droite (BA), T est un point de la droite (BF).
Comme les droites (RT) et (AF) sont parallèles, alors le théorème de Thalès permet d'écrire :

$$\frac{BR}{BA} = \frac{BT}{BF} = \frac{RT}{AF} \tag{20}$$

• Dans le triangle BCF, S est un point de la droite (BC), T est un point de la droite (BF).
Comme les droites (ST) et (CF) sont parallèles, alors le théorème de Thalès permet d'écrire :

$$\frac{BS}{BC} = \frac{BT}{BF} = \frac{ST}{CF} \tag{21}$$

• Dans le triangle BAC, R est un point de la droite (BA) et S est un point de la droite (BC).
On a $\frac{BR}{BA} = \frac{BS}{BC}$ d'après les égalités 20 et 21.
De plus, les points B, R, A sont alignés dans le même ordre que les points B, S, C.
Donc les droites (RS) et (AC) sont parallèles d'après la réciproque du théorème de Thales.

La trigonométrie

Je m'exerce

Exercice 1

①

Dans le triangle CAB, rectangle en A, on a :

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{ACB}) &= \frac{CA}{CB}\\ \cos(50°) &= \frac{CA}{6}\\ 6\times\cos(50°) &= CA\\ 3{,}86\text{ cm} &\approx CA\end{aligned}$$

②

Dans le triangle DEF, rectangle en E, on a :

$$\begin{aligned}\tan(\widehat{EDF}) &= \frac{EF}{DE}\\ \tan(62°) &= \frac{4}{DE}\\ DE &= \frac{4}{\tan(62°)}\\ DE &\approx 2{,}13\text{ cm}\end{aligned}$$

Exercice 2

①

Dans le triangle STR, rectangle en T, on a :

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{TSR}) &= \frac{ST}{SR}\\ \cos(\widehat{TSR}) &= \frac{2}{4}\\ \widehat{TSR} &= 60°\end{aligned}$$

②

Dans le triangle VIA, rectangle en I, on a :

$$\begin{aligned}\sin(\widehat{IVA}) &= \frac{IA}{VA}\\ \sin(\widehat{IVA}) &= \frac{2}{6}\\ \widehat{IVA} &\approx 19°\end{aligned}$$

Je cherche, je raisonne

Enigme 1

• On calcule la longueur AB.
Dans le triangle AEB, rectangle en E, on a :

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{EAB}) &= \frac{AE}{AB}\\ \cos(45°) &= \frac{30}{AB}\\ AB &= \frac{30}{\cos(45°)}\\ AB &\approx 42{,}43\text{ m}\end{aligned}$$

• On calcule la longueur CD.
Dans le triangle DFC, rectangle en F, on a :

$$\begin{aligned}\sin(\widehat{FDC}) &= \frac{FC}{DC}\\ \sin(50°) &= \frac{30}{DC}\\ DC &= \frac{30}{\sin(50°)}\\ DC &\approx 39{,}16\text{ m}\end{aligned}$$

• Pour calculer la longueur BC, il manque l'angle $\widehat{CBF}$.
Dans le triangle BFC, on a :

$$\begin{aligned}\widehat{BFC}+\widehat{FCB}+\widehat{CBF} &= 180°\\ 90°+50°+\widehat{CBF} &= 180°\\ 140°+\widehat{CBF} &= 180°\\ \widehat{CBF} &= 180°-140°\\ \widehat{CBF} &= 40°\end{aligned}$$

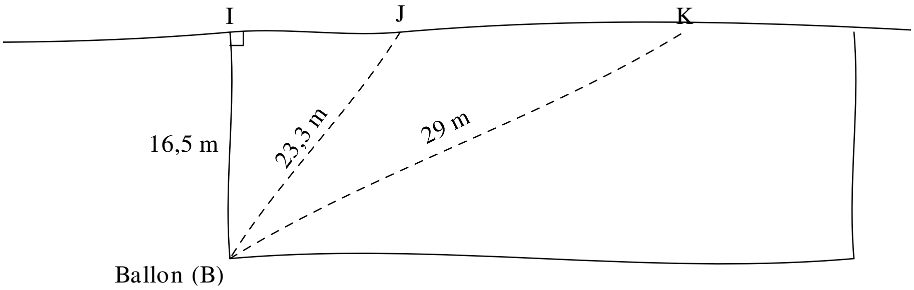
Dans le triangle BFC, rectangle en F, on a :

$$\begin{aligned}\sin(\widehat{FBC}) &= \frac{FC}{BC}\\ \sin(40°) &= \frac{30}{BC}\\ BC &= \frac{30}{\sin(40°)}\\ BC &\approx 46{,}67\text{ m}\end{aligned}$$

• La longueur totale de fil est environ égale à $42{,}43\text{ m}+39{,}16\text{ m}+46{,}67\text{ m}\approx 128{,}26\text{ m}$.

Enigme 2

Effectuons un schéma de la situation :



• Calculons l'angle $\widehat{IBJ}$.
Dans le triangle BIJ, rectangle en I, on a :

$$\cos(\widehat{IBJ}) = \frac{BI}{BJ}$$
$$\cos(\widehat{IBJ}) = \frac{16,5}{23,3}$$
$$\widehat{IBJ} \approx 45°$$

• Calculons l'angle $\widehat{IBK}$.
Dans le triangle BIK, rectangle en I, on a :

$$\cos(\widehat{IBK}) = \frac{BI}{BK}$$
$$\cos(\widehat{IBK}) = \frac{16,5}{29}$$
$$\widehat{IBK} \approx 55°$$

• L'angle de tir est égal à $\widehat{IBK} - \widehat{IBJ}$, soit environ $55° - 45° = 10°$.

Enigme 3

• On calcule la longueur AH.
Dans le triangle BHA, rectangle en H, on a :

$$\sin(\widehat{HBA}) = \frac{HA}{BA}$$
$$\sin(50°) = \frac{HA}{250}$$
$$250 \times \sin(50°) = HA$$
$$191,51 \text{ m} \approx HA$$

• Dans le triangle ABH, on a :

$$\widehat{ABH} + \widehat{BHA} + \widehat{HAB} = 180°$$
$$50° + 90° + \widehat{HAB} = 180°$$
$$140° + \widehat{HAB} = 180°$$
$$\widehat{HAB} = 180° - 140°$$
$$\widehat{HAB} = 40°$$

Donc $\widehat{HAM} = 65° - 40° = 25°$.

Dans le triangle AHM, rectangle en H, on a :

$$\begin{aligned}
\cos(\widehat{HAM}) &= \frac{AH}{AM} \\
\cos(25°) &= \frac{191{,}51}{AM} \\
AM &= \frac{191{,}51}{\cos(25°)} \\
AM &\approx 211{,}31 \text{ m}
\end{aligned}$$

Calcul littéral

Je m'exerce

Exercice 1

$$A = 4(x+8) = 4\times x + 4\times 8 = 4x+32 = 4x+32$$
$$B = -7(15-2y) = -7\times 15 + (-7)\times(-2y) = -105 + 14y$$
$$C = (y+5)(4+2y) = y\times 4 + y\times 2y + 5\times 4 + 5\times 2y = 4y + 2y^2 + 20 + 10y = 2y^2 + 14y + 20$$
$$D = (3+x)2 = 3\times 2 + x\times 2 = 6+2x$$
$$E = (5t+7)(5t-7) = (5t)^2 - 7^2 = 25t^2 - 49$$

Exercice 2

$$A = 25y^2 + 4y = 25\times y\times y + 4\times y = y(25y+4)$$
$$B = 9(2y+3) + (2y+3)(5-8y) = (2y+3)\times(9+(5-8y)) = (2y+3)\times(9+5-8y) = (2y+3)\times(14-8y)$$
$$C = (t-2)(5+4t) + (6t-1)(t-2) = (t-2)\times((5+4t)+(6t-1)) = (t-2)\times(5+4t+6t-1) = (t-2)(10t+4)$$
$$D = x^2 - 49 = x^2 - 7^2 = (x-7)(x+7)$$
$$E = (x-3)^2 - 81 = (x-3)^2 - 9^2 = ((x-3)-9)((x-3)+9) = (x-3-9)(x-3+9) = (x-12)(x+6)$$

Exercice 3

$$A = 17\times 104 = 17\times(100+4) = 17\times 100 + 17\times 4 = 1\,700 + 68 = 1\,768$$
$$B = 1\,001\times 36 = (1\,000+1)\times 36 = 1\,000\times 36 + 1\times 36 = 36\,000 + 36 = 36\,036$$
$$C = 26\times 99 = 26\times(100-1) = 26\times 100 - 26\times 1 = 2\,600 - 26 = 2\,574$$

Exercice 4

$$A = 4{,}7\times 2 + 4{,}7\times 8 = 4{,}7\times(2+8) = 4{,}7\times 10 = 47$$
$$B = 75\times 27 + 3\times 75 = 75\times(27+3) = 75\times 30 = 75\times 3\times 10 = 225\times 10 = 2\,250$$
$$C = 34\times 121 - 34\times 21 = 34\times(121-21) = 34\times 100 = 3\,400$$

Exercice 5

1. La formule de calcul du périmètre d'un rectangle est : $(L+\ell)\times 2$. Donc, en notant P le périmètre du rectangle, on obtient :
$$P = ((4x+3)+(2x+5))\times 2$$
$$P = (4x+3+2x+5)\times 2$$
$$P = (6x+8)\times 2$$
$$P = 6x\times 2 + 8\times 2$$
$$P = 12x+16$$
2. (a) La formule de calcul de l'aire d'un rectangle est : $L\times\ell$. Donc, en notant A l'aire du rectangle, on obtient :
$$A = (4x+3)\times(2x+5)$$
qui est une forme factorisée.
   (b) $A = (4x+3)(2x+5) = 4x\times 2x + 4x\times 5 + 3\times 2x + 3\times 5 = 8x^2 + 20x + 6x + 15 = 8x^2 + 26x + 15$
   L'aire du rectangle (sous forme développée et réduite) est : $8x^2 + 26x + 15$.

Exercice 6

1. (a) On choisit 4 comme nombre de départ.

$$4 + 6 = 10$$
$$10 \times 4 = 40$$
$$40 - 24 = 16$$

Si on choisit 4 comme nombre de départ, on obtient 16.

(b) • On choisit 7 comme nombre de départ.

$$7 + 6 = 13$$
$$13 \times 4 = 52$$
$$52 - 24 = 28$$

Si on choisit 7 comme nombre de départ, on obtient 28.

•On choisit -3 comme nombre de départ.

$$-3 + 6 = 3$$
$$3 \times 4 = 12$$
$$12 - 24 = -12$$

Si on choisit -3 comme nombre de départ, on obtient -12.

2. On remarque que le résultat obtenu est le quadruple du nombre de départ.
3. Choisissons x comme nombre de départ.
On obtient comme résultat : $4(x+6) - 24$.
Développons et réduisons cette expression :

$$4(x+6) - 24 = 4 \times x + 4 \times 6 - 24 = 4x + 24 - 24 = 4x$$

Si on choisit x comme nombre de départ, on obtient bien son quadruple ($4x$).

Je cherche, je raisonne

Enigme 1

$A = 3x - 5 + 8(x - 11)$
$A = 3x - 5 + \ +(8)(x - 11)$
$A = 3x - 5 + 8 \times x + 8 \times (-11)$
$A = 3x - 5 + 8x + (-88)$
$A = 11x - 93$

$B = (4x + 3)(5x - 2) + 3x^2 - 11$
$B = (4x + 3)(5x + (-2)) + 3x^2 - 11$
$B = 4x \times 5x + 4x \times (-2) + 3 \times 5x + 3 \times (-2) + 3x^2 - 11$
$B = 20x^2 + (-8x) + 15x + (-6) + 3x^2 - 11$
$B = 23x^2 + 7x - 17$

$C = 7t^2 - (2x - 3)(2x + 3) + 4$
$C = 7t^2 - ((2x)^2 - 3^2) + 4$
$C = 7t^2 - (4x^2 - 9) + 4$
$C = 7t^2 - 4x^2 + 9 + 4$
$C = 7t^2 - 4x^2 + 13$

$D = 11(y + 7) - (4y + 5)(2 - 5y)$
$D = 11 \times y + 11 \times 7 - (4y + 5)(2 + (-5y))$
$D = 11y + 77 - (4y \times 2 + 4y \times (-5y) + 5 \times 2 + 5 \times (-5y))$
$D = 11y + 77 - (8y - 20y^2 + 10 - 25y)$
$D = 11y + 77 - (-20y^2 - 17y + 10)$
$D = 11y + 77 + 20y^2 + 17y - 10$
$D = 20y^2 + 28y + 67$

Enigme 2

$A = 4t^2(t+3) - 16t(2t-9)$
$A = 4t \times t(t+3) - 4t \times 4(2t-9)$
$A = 4t \times (t(t+3) - 4(2t-9))$
$A = 4t \times (t \times t + t \times 3 + (-4)(2t + (-9)))$
$A = 4t \times (t^2 + 3t + (-4) \times 2t + (-4) \times (-9))$
$A = 4t \times (t^2 + 3t + (-8t) + 36)$
$A = 4t(t^2 - 5t + 36)$

$B = (t+5)(6t-2) - (3t+7)(6t-2)$
$B = (6t-2)((t+5) - (3t+7))$
$B = (6t-2)(t+5-3t-7)$
$B = (6t-2)(-2t-2)$

$C = (5y-3)^2 - (4+8y)(5y-3)$
$C = (5y-3)(5y-3) - (4+8y)(5y-3)$
$C = (5y-3)((5y-3) - (4+8y))$
$C = (5y-3)(5y-3-4-8y)$
$C = (5y-3)(-3y-7)$

$D = (4x-7)^2 - (6+3x)^2$
$D = ((4x-7) - (6+3x))((4x-7) + (6+3x))$
$D = (4x-7-6-3x)(4x-7+6+3x)$
$D = (x-13)(7x-1)$

Enigme 3

1. (a) On choisit 7 comme nombre de départ.

Programme A

$7 - 3 = 4$
$4 \times 8 = 32$
$32 + 7^2 = 81$

Programme B

$7 + 4 = 11$
$11^2 = 121$
$121 - 40 = 81$

Si on choisit 7 comme nombre de départ, on obtient 81 avec les deux programmes.

(b) On choisit -5 comme nombre de départ.

Programme A

$-5 - 3 = -8$
$(-8) \times 8 = -64$
$-64 + (-5)^2 = -39$

Programme B

$-5 + 4 = -1$
$(-1)^2 = 1$
$1 - 40 = -39$

Si on choisit -5 comme nombre de départ, on obtient -39 avec les deux programmes.

(c) On choisit 3,2 comme nombre de départ.

Programme A

$3{,}2 - 3 = 0{,}2$
$0{,}2 \times 8 = 1{,}6$
$1{,}6 + 3{,}2^2 = 11{,}84$

Programme B

$3{,}2 + 4 = 7{,}2$
$7{,}2^2 = 51{,}84$
$51{,}84 - 40 = 11{,}84$

Si on choisit 3,2 comme nombre de départ, on obtient 11,84 avec les deux programmes.

2. Prenons x comme nombre de départ :

Programme A

$8(x-3)+x^2$

$8(x+(-3))+x^2$

$8 \times x + 8 \times (-3) + x^2$

$x^2 + 8x - 24$

Programme B

$(x+4)^2 - 40$

$(x+4)(x+4) - 40$

$x \times x + x \times 4 + 4 \times x + 4 \times 4 - 40$

$x^2 + 4x + 4x + 16 - 40$

$x^2 + 8x - 24$

On obtient la même expression avec les deux programmes. Donc ils donnent le même résultat quel que soit le nombre de départ.

Enigme 4

Soient x et y les deux nombres dont la somme vaut 42. Donc on sait que $x+y=42$. Calculons $(x+5)\times(y+5)$.

$$\begin{aligned}
(x+5)(y+5) &= x \times y + x \times 5 + 5 \times y + 5 \times 5 \\
(x+5)(y+5) &= xy + 5x + 5y + 25 \\
(x+5)(y+5) &= xy + 5(x+y) + 25 \\
(x+5)(y+5) &= xy + 5 \times 42 + 25 \\
(x+5)(y+5) &= xy + 210 + 25 \\
(x+5)(y+5) &= xy + 235
\end{aligned}$$

Si on ajoute 5 à chaque nombre, leur produit augmente de 235.

Enigme 5

Soit n un nombre entier.
On a : $n + (n+1) + (n+2) = n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3 = 3(n+1)$.
La somme de trois nombres entiers consécutifs est bien un multiple de 3.

Équations

Je m'exerce

Exercice 1

(a)

$$\begin{aligned} x + 7 &= 13 \\ -7 \quad & \quad -7 \\ x \quad &= 6 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} y - 5 &= -4 \\ +5 \quad & \quad +5 \\ y \quad &= 1 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} -3z &= 4 \\ \div(-3) \quad & \quad \div(-3) \\ z &= \frac{4}{-3} \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} \frac{x}{4} &= -15 \\ \times 4 \quad & \quad \times 4 \\ x &= -60 \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} 4y - 5 &= 11 \\ +5 \quad & \quad +5 \\ 4y \quad &= 16 \\ \div 4 \quad & \quad \div 4 \\ y \quad &= \frac{16}{4} \\ y \quad &= 4 \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned} 8z + 7 &= 4z - 3 \\ -4z \quad & \quad -4z \\ 4z + 7 &= \quad -3 \\ -7 \quad & \quad -7 \\ 4z \quad &= \quad -10 \\ \div 4 \quad & \quad \div 4 \\ z \quad &= \frac{-10}{4} \\ z \quad &= \frac{-5}{2} \end{aligned}$$

Exercice 2

(a) C'est un produit nul donc l'un au moins des facteurs est nul :

$$\begin{aligned} x + 5 &= 0 \\ x &= -5 \end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} 2x + 4 &= 0 \\ 2x &= -4 \\ x &= \frac{-4}{2} \\ x &= -2 \end{aligned}$$

L'équation $(x+5)(2x+4) = 0$ a deux solutions : $x = -5$ et $x = -2$.

(b) C'est un produit nul donc l'un au moins des facteurs est nul :

$$\begin{aligned} 2y + 3 &= 0 \\ 2y &= -3 \\ y &= \frac{-3}{2} \end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} -7y + 9 &= 0 \\ -7y &= -9 \\ y &= \frac{-9}{-7} \\ y &= \frac{9}{7} \end{aligned}$$

L'équation $(2y+3)(-7y+9) = 0$ a deux solutions : $y = -1{,}5$ et $y = \frac{9}{7}$.

Exercice 3

1. On a $7 \times 6 = 42$ et $42 + 9 = 51$.
   Si on choisit 7 comme nombre de départ, on obtient 51.

2. Il faut résoudre l'équation $6x + 9 = 75$.

$$\begin{array}{rcl} 6x + 9 &=& 75 \\ -9 && -9 \\ 6x &=& 66 \\ \div 6 && \div 6 \\ x &=& \dfrac{66}{6} \\ x &=& 11 \end{array}$$

Si on veut obtenir 75 comme résultat, on doit choisir 11 comme nombre de départ.

3. Il faut résoudre l'équation $6x + 9 = 3x$.

$$\begin{array}{rcl} 6x + 9 &=& 3x \\ -3x && -3x \\ 3x + 9 &=& 0 \\ -9 && -9 \\ 3x &=& -9 \\ \div 3 && \div 3 \\ x &=& \dfrac{-9}{3} \\ x &=& -3 \end{array}$$

Si on choisit -3 comme nombre de départ, on obtient son triple.

Exercice 4

Soit n la note que doit obtenir Jean à sa prochaine évaluation.
On résout l'équation suivante :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{11{,}5 + n}{2} &=& 13 \\ \times 2 && \times 2 \\ 11{,}5 + n &=& 26 \\ -11{,}5 && -11{,}5 \\ n &=& 14{,}5 \end{array}$$

Pour que sa moyenne soit égale à 13, Jean doit obtenir 14,5 à sa prochaine évaluation.

Exercice 5

Soit x le nombre qu'Emmy et Nathan avaient choisi comme nombre de départ.
On résout l'équation suivante :

$$\begin{array}{rcl} 7x - 5 &=& 4x + 10 \\ -4x && -4x \\ 3x - 5 &=& 10 \\ +5 && +5 \\ 3x &=& 15 \\ \div 3 && \div 3 \\ x &=& \dfrac{15}{3} \\ x &=& 5 \end{array}$$

Je cherche, je raisonne

Enigme 1

Soit t le prix d'un T-shirt.
On doit résoudre l'équation suivante :

$$\begin{aligned} 3x + 22 &= 9x - 30 \\ -3x \quad & \quad -3x \\ 22 &= 6x - 30 \\ +30 \quad & \quad +30 \\ 52 &= 6x \\ \div 6 \quad & \quad \div 6 \\ \frac{52}{6} &= x \\ \frac{26}{3} &= x \end{aligned}$$

Le prix d'un T-shirt est de $\frac{26}{3}$ €.

Enigme 2

1. On a :

$$\begin{aligned} 5 + 4 &= 9 \\ 2 \times 5 - 3 &= 7 \\ 9 \times 7 &= 63 \end{aligned}$$

   Si la valeur de x est 5, on obtient bien 63.
2. On a :

$$\begin{aligned} -3 + 4 &= 1 \\ 2 \times (-3) - 3 &= -9 \\ 1 \times (-9) &= -9 \end{aligned}$$

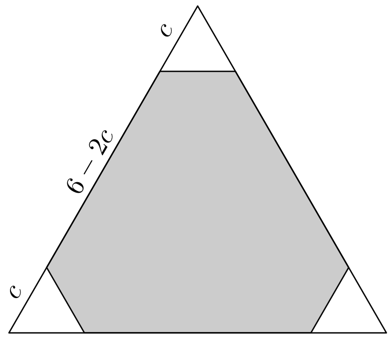
   Si la valeur de x est -3, on obtient bien -9.
3. C'est l'expression A.
4. On résout l'équation suivante : $(x+4)(2x-3) = 0$.
   C'est un produit nul donc l'un au moins des facteurs est nul :

$$\begin{aligned} x + 4 &= 0 \\ x &= -4 \end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} 2x - 3 &= 0 \\ 2x &= 3 \\ x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

   On a un résultat égal à 0, si x est égal à -4 ou à $\frac{3}{2}$.

Enigme 3

Soit c la mesure d'un côté de l'un des petits triangles équilatéraux.



Dans l'hexagone gris, on a trois côtés de longueur c et trois côtés de longueur $6-2c$.
Calculons le périmètre de l'hexagone gris :

$$P_{\text{hexagone gris}} = 3 \times c + 3 \times (6 - 2c)$$
$$P_{\text{hexagone gris}} = 3c + 18 - 6c$$
$$P_{\text{hexagone gris}} = -3c + 18$$

Calculons le périmètre des trois petits triangles : $P_{\text{trois petits triangles}} = 3 \times 3c = 9c$.
Comme les périmètres sont égaux, on obtient l'équation :

$$\begin{array}{rcl} -3x + 18 & = & 9x \\ \color{red}{+\,3x} & & \color{red}{+\,3x} \\ 18 & = & 12x \\ \color{red}{\div\,12} & & \color{red}{\div\,12} \\ \dfrac{18}{12} & = & x \\ \dfrac{3}{2} & = & x \end{array}$$

La mesure du côté des petits triangles est égale à 1,5 cm.

Grandeurs

Exercice 1

1. Calculons la superficie du terrain : $38 \times 25 = 950\,\text{m}^2$.
   Calculons le rayon du cercle : $5{,}2 \div 2 = 2{,}6\,\text{m}$.
   Calculons la superficie du potager : $2{,}5 \times 5{,}2 + \dfrac{\pi \times 2{,}6 \times 2{,}6}{2} \approx 23{,}6\,\text{m}^2$.
   Calculons la superficie restante : $950 - 23{,}6 - 147 \approx 779{,}4\,\text{m}^2$.
   Il faut tondre environ $779{,}4\,\text{m}^2$ de pelouse.
2. Le demi-cercle a un périmètre égal à :
   $$\pi \times 5{,}2 \div 2 = \pi \times 2{,}6 \approx 8{,}2\,\text{m}$$
   Donc la longueur de grillage à acheter est environ égale à :
   $$8{,}2\,\text{m} + 2{,}5\,\text{m} + 5{,}2\,\text{m} + 2{,}5\,\text{m} = 18{,}4\,\text{m}$$

Exercice 2

1. $V = 2 \times 2 \times 2 = 8\,\text{cm}^3$.
2. $V = \dfrac{5 \times 3 \times 4{,}8}{3} = 24\,\text{cm}^3$
3. $V = 2 \times 5{,}4 \times 4{,}2 = 45{,}36\,\text{cm}^3$.

Exercice 3

1. $V = \dfrac{\pi \times 5^2 \times 12}{3} = 100\pi\ \text{dm}^3$.
   La valeur exacte du volume de ce cône de révolution est de $100\pi\ \text{dm}^3$.
2. $V = 100\pi \approx 314{,}159\,\text{dm}^3$

Exercice 4

1. (a) $4{,}5\,\text{km} = 450\,000\,\text{cm}$
   (b) $458\,\text{cm} = 4{,}58\,\text{m}$
2. (a) $0{,}42\,\text{m}^2 = 4\,200\,\text{cm}^2$
   (b) $63{,}5\,\text{dm}^2 = 6\,350\,\text{cm}^2$
3. (a) $13{,}4\,\text{dm}^3 = 0{,}000\,013\,4\,\text{dam}^3$
   (b) $0{,}78\,\text{hm}^3 = 780\,000\,\text{m}^3$
4. (a) $2\,578\,\text{cL} = 25{,}78\,\text{dm}^3$
   (b) $41{,}75\,\text{dm}^3 = 417{,}5\,\text{dL}$

Exercice 5

1. $16{,}6 + 9{,}5 = 26{,}1\,\text{mm}$
   Cette gélule correspond au calibre 000.
2. Calculons le rayon de la sphère : $9{,}5 \div 2 = 4{,}75\,\text{mm}$.
   $$V_{\text{gélule}} = V_{\text{cylindre}} + V_{\text{sphère}}$$
   $$V_{\text{gélule}} = \pi \times 4{,}75^2 \times 16{,}6 + \frac{4 \times \pi \times 4{,}75^3}{3}$$
   $$V_{\text{gélule}} \approx 1\,626\,\text{mm}^3$$
   Le volume de la gélule, arrondi au mm^3, est de $1\,626\,\text{mm}^3$.

Je cherche, je raisonne

Enigme 1

1. On trace un segment de longueur $4 \times 2 + 1 = 9\,\text{cm}$.
   On trace deux arcs de cercle de centre les extrémités de ce segment et de rayon 9 cm. Ils se coupent

en un point qui est le troisième sommet du triangle équilatéral.

2. (a) Le périmètre du rectangle est égal à :

$$P = 2(L+\ell) = 2(4x+1,5+2x) = 2(6x+1,5) = 12x+3$$

(b) Il faut résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} 12x + 3 &= 18 \\ {\color{red}-3} &\quad {\color{red}-3} \\ 12x &= 15 \\ {\color{red}\div 12} &\quad {\color{red}\div 12} \\ x &= \frac{15}{12} \end{aligned}$$

Le périmètre du rectangle est égal à 18 cm pour $x = \dfrac{15}{12} = 1,25$ cm.

3. Le périmètre du triangle équilatéral est : $3(4x+1) = 12x+3$.
On remarque que, quel que soit le nombre positif x, le triangle équilatéral et le rectangle ont le même périmètre.

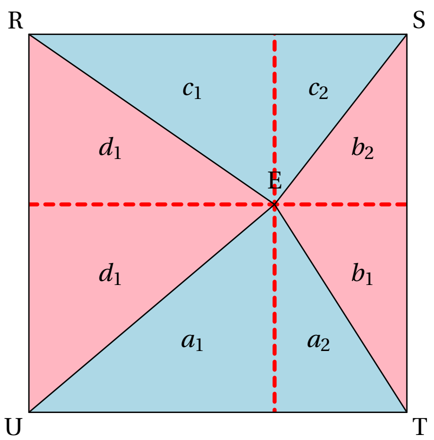
Enigme 2

Le rectangle qui a la plus grande aire est le carré de côté 12 cm. Son aire est égal à 144 cm^2.
Pour rappel : un carré est un rectangle particulier.

Enigme 3

La pavé droit a pour base un carré de côté $9-2\times 0,2 = 8,6$ cm et de hauteur $21,7-1,7 = 20$ cm.
Calculons le volume du vase : $8,6\times 8,6\times 20 = 1\,479,2\text{ cm}^3$.
Calculons le volume des 150 billes : $V = 150\times\dfrac{4\times\pi\times 0,9^3}{3} \approx 458\text{ cm}^3$.
Calculons le volume restant : $V_{\text{restant}} = 1\,479,2-458 = 1\,021,2\text{ cm}^3 = 1,021\,2$ L.
Antoine peut ajouter un litre d'eau colorée.

Enigme 4



Si on trace deux segments perpendiculaires aux côtés du carré et passant par E, on obtient des triangles de même aire.
Ainsi :

$$\begin{aligned} a_1 &= d_2 \\ a_2 &= b_1 \\ c_1 &= d_1 \\ c_2 &= b_2 \end{aligned}$$

L'aire des triangles roses est donc égale à celle des triangles bleus.

Grandeurs composées

Je m'exerce

Exercice 1

$80\,\text{km} = 80\,000\,\text{m}$ et $1\,\text{h} = 3\,600\,\text{s}$. Donc $80\,\text{km/h} = \dfrac{80\,000}{3\,600}\,\text{m/s} \approx 22{,}2\,\text{m/s}$

Exercice 2

1. $574{,}8\,\text{km} = 574{,}800\,0\,\text{m}$ et $1\,\text{h} = 3\,600\,\text{s}$. Donc $574{,}8\,\text{km/h} = \dfrac{574\,800}{3\,600}\,\text{m/s} \approx 160\,\text{m/s}$
2. $143{,}14\,\text{m} = 0{,}143\,14\,\text{km}$ et $1\,\text{s} = \dfrac{1}{3\,600}\,\text{h}$.
   Donc $143{,}14\,\text{m/s} = \dfrac{0{,}143\,14}{\dfrac{1}{3\,600}} = 515{,}304\,\text{km/h}$.

Exercice 3

1. La masse surfacique va être : $\dfrac{12}{10} = 1{,}2\,\text{mg/cm}^2$.
2. $1{,}2\,\text{mg} = 0{,}001\,2\,\text{g}$ et $1\,\text{cm}^2 = 0{,}000\,1\,\text{m}^2$ donc $1{,}2\,\text{mg/cm}^2 = \dfrac{0{,}001\,2}{0{,}000\,1}\,\text{g/m}^2 = 12\,\text{g/m}^2$.

Exercice 4

1. $1\,\text{min} = 60\,\text{s}$ donc $600\,\text{tr/min} = \dfrac{600}{60}\,\text{tr/s} = 10\,\text{tr/s}$.
2. $3\,\text{min}30\,\text{s} = 210\,\text{s}$.
   Or la vitesse d'essorage est de 10 tr/s.
   $210 \times 10 = 2\,100$
   Donc il y a 2 100 tours effectués lors de l'essorage.
3. $\dfrac{3\,360}{10} = 336\,\text{s}$ et $336\,\text{s} = 5\,\text{min}36\,\text{s}$

Exercice 5

$4 \times 3 = 12$ donc, dans la famille FONTAINE, chaque jour la douche est utilisée pendant 12 minutes.
Un an comporte 365 jours et $365 \times 12 = 4\,380$. Donc on utilise la douche pendant 4 380 minutes par an dans cette famille.

Avec une pomme de douche classique Comme $15 \times 4\,380 = 65\,700$, alors chaque année, cette famille utilise 65 700 L d'eau.
$1\,\text{m}^3 = 1\,000\,\text{L}$, donc $65\,700\,\text{L} = 65{,}7\,\text{m}^3$ d'eau utilisés chaque année.
$65{,}7 \times 3 = 197{,}1$. Donc cette famille dépense actuellement 197,10 € pour ses douches.

Avec une pomme de douche à débit réduit Comme $6 \times 4\,380 = 26\,280$, alors chaque année, cette famille utilise 26 280 L d'eau.
$1\,\text{m}^3 = 1\,000\,\text{L}$, donc $26\,280\,\text{L} = 26{,}28\,\text{m}^3$ d'eau utilisés chaque année.
$26{,}28 \times 3 = 78{,}84$. Donc cette famille dépenserait 78,84 € pour ses douches, avec une pomme de docuhe à débit réduit.

$197{,}10 - 78{,}84 = 118{,}26$.
Donc ils feraient une économie de 118,26 €.

Je cherche, je raisonne

Enigme 1

Pour savoir si cet haltère est équilibré, il suffit de comparer les masses des deux boules qui le composent.
On sait qu'une des boules a une masse de 6 kg.
On calcule la masse de l'autre. Le volume de la boule est donné par :

$$\frac{4 \times \pi \times 0{,}6^3}{3} \approx 0{,}905$$

donc le volume de cette boule est d'environ $0{,}905\,\text{dm}^3 = 905\,\text{cm}^3$.
La masse volumique de l'acier constituant cet haltère est de $7{,}8\,\text{g/cm}^3$, donc

$$7{,}8 \times 905 = 7\,059\,\text{g} = 7{,}059\,\text{kg}$$

On peut donc conclure que cet haltère n'est pas équilibré.

Enigme 2

1. 255 jours qui sont composés de 24 heures donc : $255 \times 24 = 6\,120$ heures. Le vol a duré 6 120 heures.
2. Le rover a parcouru 560 millions de km, c'est à dire 560 000 000 km en 6 120 heures.

$$\frac{560\,000\,000}{6\,120}\,\text{km/h} = 91\,503{,}268\,\text{km/h}$$

Donc la vitesse moyenne du Rover est de 91 500 km/h à la centaine près.

3. On calcule le temps nécessaire pour parcourir $248{,}10 \times 10^6$ km à une vitesse moyenne de 300 000 km/s :

$$\frac{248\,000\,000}{300\,000} \approx 827\,\text{s (arrondi à l'unité)}$$

Le signal a donc mis 827 s pour arriver au centre de la NASA. On convertit ce temps en secondes :

$$827 = 13 \times 60 + 47$$

donc 827 s = 13 min 47 s.
Et 7 h 48 min + 13 min 47 s = 8 h 1 min 47 s.
Les premières images sont donc arrivées à 8 h 2 min.

Enigme 3

On sait que le navire parcourt 246 m en 40 secondes.
$\frac{246}{40} = 6,15$. Donc ce navire avance à une vitesse de 6,15 m/s.
Or 1 nœud = 0,5 m/s donc 6,15 m/s = 12,3 nœuds.
On peut donc dire qu'Eva a raison.

Notion de fonction

Je m'exerce

Exercice 1

1. L'image de 4 par la fonction f est 9.
   -3 a pour image -7 par la fonction f.
2. 4 est un antécédent de 9 par la fonction f.
   -7 a pour antécédent -3 par la fonction f.
3. (a) $g(2) = -5$
   (b) $h(12) = -8$
   (c) $k(-8) = 4$
   (d) $w(8) = -2$

Exercice 2

1. (a) $j(x) = x^2 + 2$ (b) $j(2) = 6$ (c) $j(-4) = 18$
2. $j(10) = 10^2 + 2 = 102$
3. $j(-5) = (-5)^2 + 2 = 27$

Exercice 3

1. (a) $h(-1) = 12$
   (b) $h(6) = 5$
2. L'image de -7 est -4.
3. L'image de -1 est 12.
4. Les antécédents de -4 sont -7 et 10.

Exercice 4

x	-3	-1	4	10
$g(x)$	15	-1	29	197

Exercice 5

1. L'image du nombre 9 est 5.
2. $h(-1) = 1$.
3. Les antécédents de 0 par h sont 3 et 7.
4. L'image de -3 est 4.
5. Les antécédents de -2 sont 4 et 6.
6. Les antécédents de 2 sont -2 ; 0 ; 2 et 8.

Je cherche, je raisonne

Enigme 1

1.

$$h(t) = -5t^2 + 5 \times 3{,}7t - 1{,}35t + 1{,}35 \times 3{,}7$$
$$h(t) = -5t^2 + 18{,}5t - 1{,}35t + 4{,}995$$
$$h(t) = -5t^2 + 17{,}15t + 4{,}995$$

   L'affirmation est fausse.
2. Gaëtan quitte la rampe au temps $t = 0$; on obtient $h(0) = 4{,}995$.
   L'affirmation est fausse.
3. Gaëtan retombe au bout de 3,7 s, donc le saut dure moins de 4 secondes.
   L'affirmation est vraie.
4. On a $h(3{,}5) = (-5 \times 3{,}5 - 1{,}35)(3{,}5 - 3{,}7) = -18{,}85 \times (-0{,}2) = 3{,}77$.
   L'affirmation est vraie.
5. D'après le graphique, la hauteur maximale est atteinte entre 1,5 et 2 secondes.
   L'affirmation est fausse.

Enigme 2

1. Non, car ce n'est pas une droite qui passe par l'origine.
2. $A(10) = 1\,250 - 50 \times 10 = 1\,250 - 500 = 750$.
   Ce qui signifie que si la revue est au prix de 10 €, le nombre d'abonnés est de 750.
3. La recette semble maximale pour $x = 12{,}50$ €.
4. Les antécédents de 6 800 sont 8 et 17.
5. On a $A(5) = 1\,250 - 50 \times 5 = 1\,250 - 250 = 1\,000$.
   On a $R(5) = 1\,250 \times 5 - 50 \times 5^2 = 6\,250 - 1\,250 = 5\,000$ ou simplement $1\,000 \times 5 = 5\,000$ €.
   Donc lorsque le revue coûte 5 €, il y a 1 000 abonnés et 5 000 € de recette.

Je me teste

1 - C / 2 - C / 3 - A / 4 - B / 5 - C / 6 - B

Fonctions affines

Je m'exerce

Exercice 1

Les représentations graphiques 1 et 2 peuvent représenter des fonctions affines car ce sont des droites.

Exercice 2

1. Les fonctions f, g, h, i, j sont des fonctions affines :

$$f(x) = 4x + -5 \qquad g(x) = 3x + 0 \qquad h(x) = \frac{1}{2}x + 3$$

$$i(x) = 0x + 8 \qquad j(x) = x^2 - 3 - 5x + x^2 = -5x + (-3)$$

2. La fonction g est une fonction linéaire.

Exercice 3

1.

Durée t (en h)	1	0,5	1,5	5
Distance $d(t)$ (en km)	5	2,5	7,5	25

2. En 4 h, Sandrine parcourt 20 km.
3. $d(t) = 5t$
4. d est une fonction linéaire car elle modélise une situation de proportionnalité.

Exercice 4

Les situations 1 ; 3 et 4 peuvent être modélisées par une fonction affine. Elle sera même linéaire pour la situation 1.

Situation 1 Pour trouver le prix à payer, on multiplie la quantité d'essence achetée par le même nombre : le prix au litre. C'est une situation de proportionnalité.

Situation 3 Notons n le nombre de mois et p son poids : $p(n) = 90 + 6n$.

Situation 4 Notons x le nombre de porte-clés vendus et p le prix à payer : $p(x) = 5x + 3$.

Exercice 5

1.

$$f(-2) = -4 \times (-2)$$
$$f(-2) = 8$$

L'image de -3 par la fonction g est $g(-3) = 3 \times (-3) + 2 = -9 + 2 = -7$

2. On cherche l'antécédent de 12 par la fonction f, c'est-à-dire le nombre x tel que $f(x) = 12$. Or, la fonction f est définie par :

$$f : x \overset{\times(-4)}{\longrightarrow} -4x$$

Par conséquent, on a :

$$-4x = 12$$
$$x = \frac{12}{-4}$$

L'antécédent de 12 par la fonction f est $\frac{12}{-4} = -3$.

• On cherche l'antécédent de -5 par la fonction g, c'est-à-dire le nombre x tel que $g(x) = -5$. Or, la fonction g est définie par :

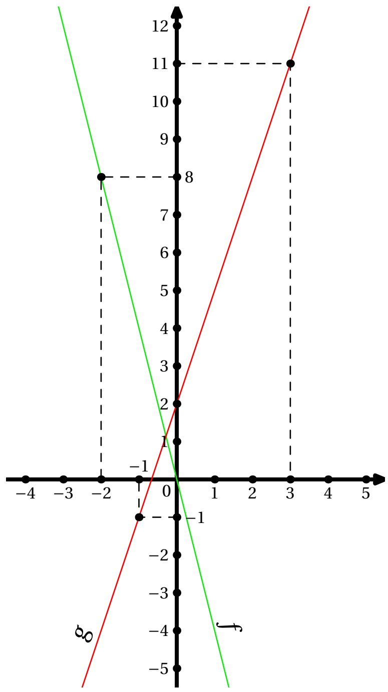
$$g : x \xrightarrow{\times 3} 3x \xrightarrow{+2} 3x + 2$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} 3x + 2 &= -5 \\ 3x &= -7 \\ x &= \frac{-7}{3} \end{aligned}$$

L'antécédent de -5 par la fonction g est $\dfrac{-7}{3}$.

3. Comme la fonction f est une fonction linéaire, alors sa représentation graphique est une droite passant par l'origine du repère.
Je choisis $x = -2$. Son image est $f(-2) = -4 \times (-2) = 8$. On place le point de coordonnées $(-2; 8)$.
• Comme g est une fonction affine, alors sa représentation graphique est une droite.
Je choisis $x = -1$. Son image est $g(-1) = 3 \times (-1) + 2 = -3 + 2 = -1$. On place le point de coordonnées $(-1; -1)$.
Je choisis $x = 3$. Son image est $g(3) = 3 \times 3 + 2 = 9 + 2 = 11$. On place le point de coordonnées $(3; 11)$.



Je cherche, je raisonne

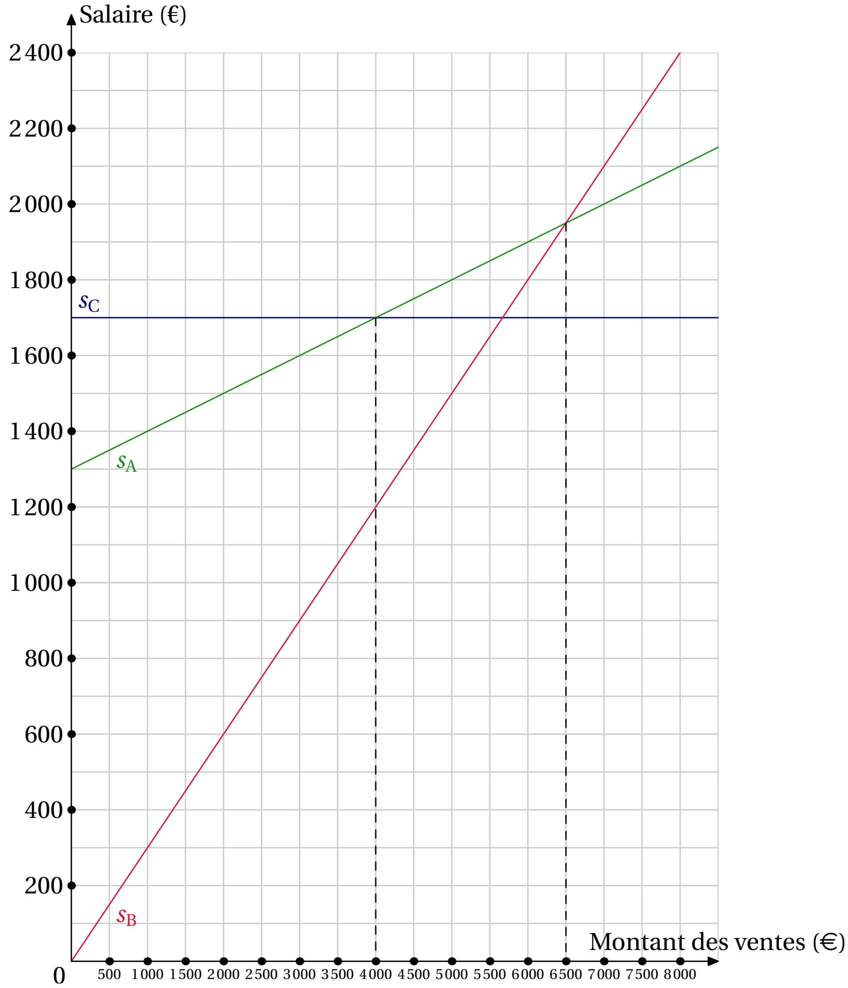
Enigme 1

Si on note x le montant de ses ventes, s_A le salaire dans la société A, s_B le salaire dans la société B et s_C le salaire dans la société C, on a :

$$\begin{aligned} s_A(x) &= 1\,300 + 0{,}1x \\ s_B(x) &= 0{,}3x \\ s_C(x) &= 1\,700 \end{aligned}$$

• Comme s_A est une fonction affine, alors sa représentation graphique est une droite.
Je choisis $x = 0$. Son image est $s_A(0) = 0{,}1 \times 0 + 1\,300 = 0 + 1\,300 = 1\,300$. On place le point de coordonnées $(0; 1\,300)$.
Je choisis $x = 5\,000$. Son image est $s_A(5\,000) = 0{,}1 \times 5\,000 + 1\,300 = 500 + 1\,300 = 1\,800$. On place le point de coordonnées $(5\,000; 1\,800)$.

• Comme la fonction s_B est une fonction linéaire, alors sa représentation graphique est une droite passant par l'origine du repère.
Je choisis $x = 2\,000$. Son image est $s_B(2\,000) = 0{,}3 \times 2\,000 = 600$. On place le point de coordonnées $(2\,000; 600)$.
• Comme la fonction s_C est une fonction constante, alors sa représentation graphique est une droite parallèle à l'axe des abscisses passant par le point de coordonnées $(0; 1\,700)$.



Si le montant de ses ventes est inférieur à 4 000 €, il vaut mieux qu'elle travaille dans la société C.
Si le montant de ses ventes est entre 4 000 € et 6 500 €, il vaut mieux qu'elle travaille dans la société A.
Si le montant de ses ventes est supérieur à 6 500 €, il vaut mieux qu'elle travaille dans la société B.

Enigme 2

1. JO HBOESB OEH ICIXO
2.

Lettre à coder	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43
r	7	10	13	16	19	22	25	2	5	8	11	14	17
Lettre codée	H	K	N	Q	T	W	Z	C	F	I	L	O	R

Lettre à coder	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
x	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$f(x)$	46	49	52	55	58	61	64	67	70	73	76	79	82
r	20	23	0	3	6	9	12	15	18	21	24	1	4
Lettre codée	U	X	A	D	G	J	M	P	S	V	Y	B	E

3. « Bravo pour ta réussite »
4. RTGNF

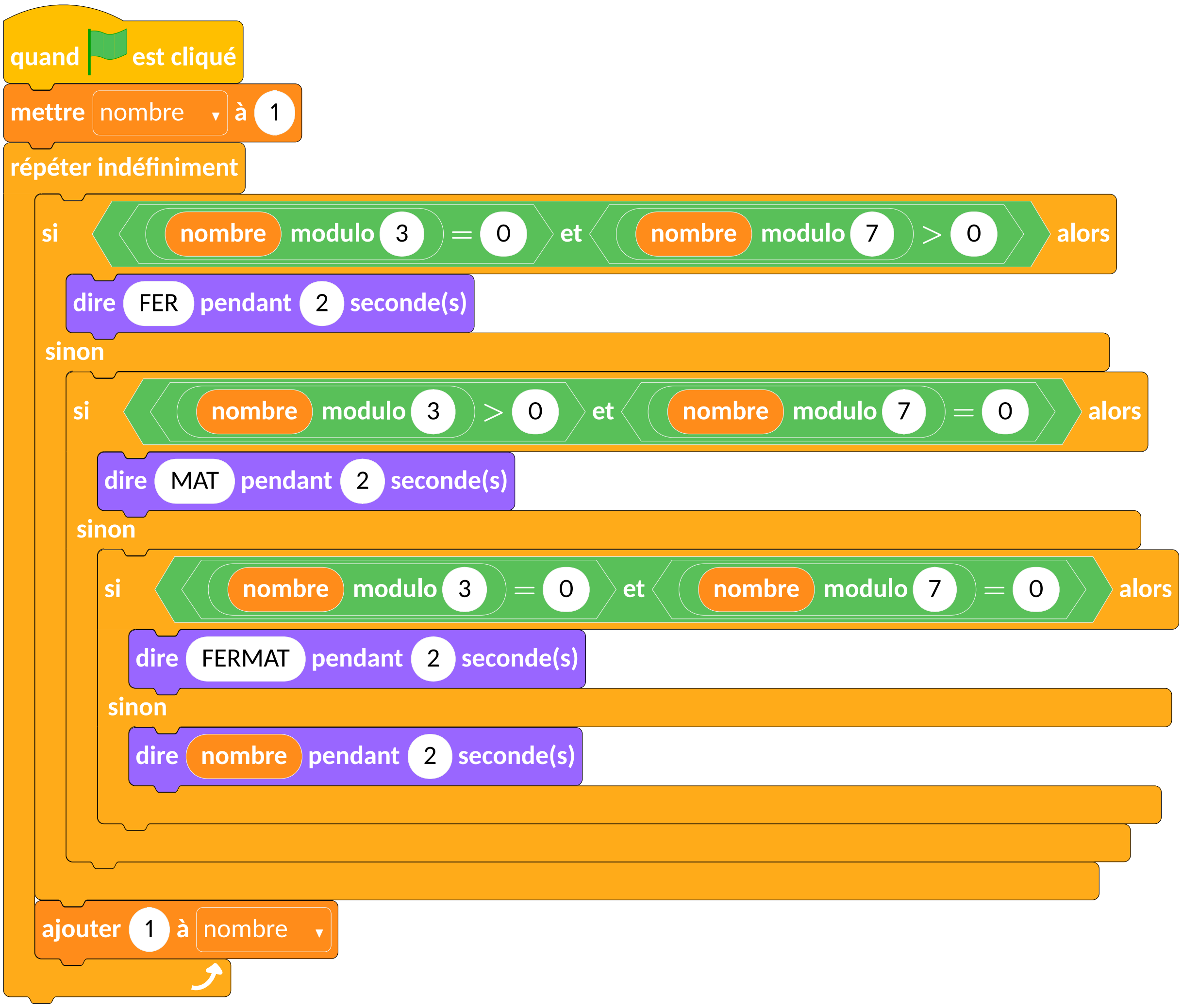
Algorithmique

Exercice 1

À la ligne 3, il suffit de remplacer la valeur 4 par 9.

Exercice 2

1. On peut le faire à l'infini mais ce n'est pas évident…
2. Voici un exemple de script Scratch pour ce jeu :



Exercice 3

Si l'utilisateur entre le nombre 7, on obtient le nombre 15.
S'il entre le nombre 12, il obtient le nombre 3,25.
S'il entre le nombre 10, il obtient le nombre 3.

Un projet

1. (a) Non, le pirate ne peut pas débuter sa recherche au point de coordonnées $(50; 120)$ car les valeurs de y vont de -100 à 100.

   (b) La taille du lutin au début de la recherche est de 20 % de la taille initiale car on a enlevé 10 fois 8 à la taille.
2. https://scratch.mit.edu/projects/404815810/editor/
3. Non, il ne va pas creuser de façon uniforme dans le triangle.

Compléments sur les pourcentages

Je m'exerce

Exercice 1

$$100\ \% = \frac{100}{100} = 1$$
$$1\ \% = \frac{1}{100} = 0{,}01$$
$$10\ \% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$
$$5\ \% = \frac{5}{100} = \frac{1}{20} = 0{,}05$$
$$25\ \% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$
$$50\ \% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$
$$75\ \% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

Exercice 2

$$\frac{80}{125} = \frac{80_{\div 5}}{125_{\div 5}} = \frac{16}{25} = \frac{64}{100}$$

Il y a 64 % des élèves qui vont dans le lycée de leur secteur.

Exercice 3

$$\frac{14}{100} = \frac{28}{200}$$

28 personnes ne partent pas en vacances.

Exercice 4

a) Augmenter de 32 %, c'est multiplier par $\left(1 + \frac{32}{100}\right) = 1{,}32$.

b) Augmenter de 7,8 %, c'est multiplier par $\left(1 + \frac{7{,}8}{100}\right) = 1{,}078$.

c) Diminuer de 25 %, c'est multiplier par $\left(1 - \frac{25}{100}\right) = 0{,}75$.

d) Diminuer de 8,6 %, c'est multiplier par $\left(1 + \frac{8{,}6}{100}\right) = 0{,}914$.

Exercice 5

$$\left(1 + \frac{9}{100}\right) \times 95 = 1{,}09 \times 95 = 103{,}55$$

Le nombre de clients s'élève désormais à environ 104.

Exercice 6

Soit p le prix final.
On a :

$$p = \left(1 - \frac{20}{100}\right) \times 70 = 0{,}8 \times 70 = 56$$

Le prix soldé du pantalon est 56 €.

Exercice 7

Calculons le nombre de croissants : $\frac{40}{100} \times 25 = 10$. Il y a 10 croissants.

Calculons le nombre de croissants fourrés aux amandes : $\frac{20}{100} \times 10 = 2$. Il y a 2 croissants fourrés aux amandes.

On a $\frac{2}{25} = \frac{8}{100}$. Parmi toutes les viennoiseries, il y a 8 % de croissants fourrés aux amandes.

Exercice 8

(a) 40 % (b) 1 140 (c) 180 € (d) 17,5 %

Exercice 9

(a) Soit p le prix initial. On a donc $\left(1+\frac{10}{100}\right) \times p = 63{,}80$. On doit alors résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} 1{,}1p &= 63{,}80 \\ {\color{red}\div 1{,}1} \quad & \quad {\color{red}\div 1{,}1} \\ p &= \frac{63{,}80}{1{,}1} \end{aligned}$$

Le prix initial de l'article est de $\frac{63{,}80}{1{,}1} = 58$ €.

(b) Soit h le nombre d'habitants avant la baisse. On a donc $\left(1-\frac{20}{100}\right) \times h = 384\,000$. On doit donc résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} 0{,}8h &= 384\,000 \\ {\color{red}\div 0{,}8} \quad & \quad {\color{red}\div 0{,}8} \\ h &= \frac{384\,000}{0{,}8} \end{aligned}$$

Le nombre d'habitants avant la baisse est de $\frac{384\,000}{0{,}8} = 480\,000$.

Exercice 10

Calculons le montant de la réduction : 8 € – 5 € = 3 €.
Or, $\frac{3}{8} = \frac{37{,}5}{100}$.
Le pourcentage de réduction est de 37,5 %.

Je cherche, je raisonne

Enigme 1

1. Soit p le prix initial du pantalon. On a :

$$\begin{aligned} \left(1-\frac{30}{100}\right) \times p &= 60{,}20 \\ 0{,}7 \times p &= 60{,}20 \\ p &= \frac{60{,}20}{0{,}7} \\ p &= 86 \end{aligned}$$

Le prix initial du pantalon était de 86 €.

2. $\left(1 - \frac{10}{100}\right) \times 60{,}20 = 0{,}9 \times 60{,}20 = 54{,}18$. Léa va payer 54,18 €.
3. Calculons le montant de la réduction obtenue par Léa : 86 € – 54,18 € = 31,82 €.

Réduction (€)	31,82	
Total	86	100

$\div 0{,}86$; $\times 0{,}86$

Il y a donc une réduction de $31{,}82 \div 0{,}86 = 37$ %.

Léa n'a pas raison, elle a obtenu une réduction de 37 % et non de 40 %.

Enigme 2

Prenons un exemple.
Si un article coûte 100 € au départ, après l'augmentation de 20 %, son prix est maintenant de :

$$\left(1 + \frac{20}{100}\right) \times 100 = 120 \text{ €}$$

Si on diminue le nouveau prix de 20 %, on a :

$$\left(1 - \frac{20}{100}\right) \times 120 = 96 \text{ €}$$

Après une augmentation de 20 % puis une remise de 20 %, on ne revient pas au prix initial.

Enigme 3

1. Il y avait environ 64 millions d'habitants en 2015.

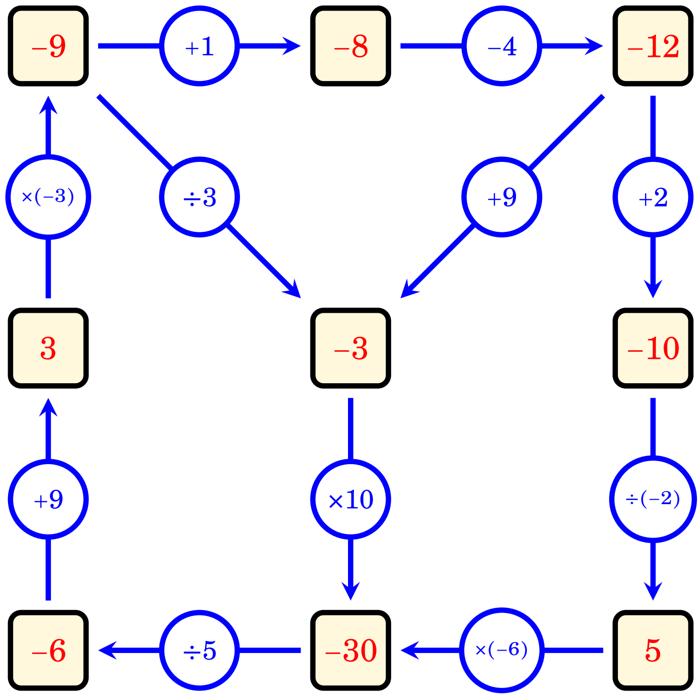
$$\frac{4{,}7}{100} \times 64\,000\,000 = 3\,008\,000 \text{ personnes}$$

En 2010, il y en avait deux fois moins : $3\,008\,000 \div 2 = 1\,504\,000 \approx 1\,500\,000$.
Il y avait environ 1 500 000 personnes qui souffraient d'allergies alimentaires en 2010.

2. $\frac{1}{100} \times 50\,100\,000 = 501\,000$.
Or, $6 \times 501\,000 = 3\,006\,000$.
Il est vrai qu'en 2015, il y avait environ 6 fois plus de personnes concernées qu'en 1970.

Détente

Complète ces différentes boucles en plaçant les nombres proposés et les opérations à effectuer aux bons emplacements.



Nombres à placer

−30 −12 −10 −9

−8

−6 −3 3 5

Opérations à utiliser

−4 +1 +2 +9 ×(−6)

×(−3) ×10 ÷(−2) ÷3 ÷4

÷5