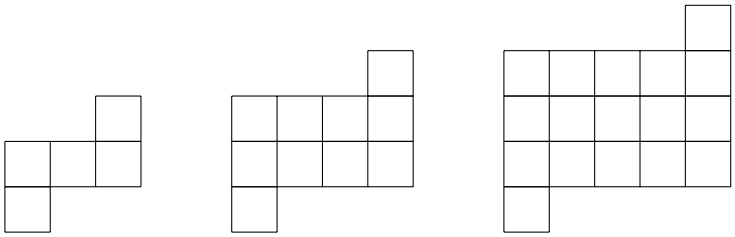
RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Exercice 1

Avec des petits carrés tous identiques, on construit un pattern selon le modèle évolutif ci-dessous.



Rang 1 **Rang 2** **Rang 3**

Trouvez **quatre manières différentes** de calculer le nombre de petits carrés au rang a (avec $a \in \mathbb{N}$) en complétant la figure avec des formes simples (carrés, rectangles, etc.).
Pour chaque méthode, écrivez l'expression algébrique correspondante, puis prouvez que vos quatre expressions sont égales.

Exercice 2

Un jardinier possède un terrain carré de côté x mètres. Il décide d'agrandir son jardin en ajoutant une bande de 3 mètres de large tout autour du terrain initial.

1. Faire un schéma pour représenter la situation
2. Le jardinier affirme : « L'aire que j'ai ajoutée est exactement égale à 6 fois le périmètre de mon jardin initial plus 36 m^2 ». A-t-il raison ? Justifiez votre réponse.
3. Un voisin possède un jardin rectangulaire de dimensions x mètres sur $(x+6)$ mètres. Il souhaite lui aussi ajouter une bande de 3 mètres tout autour.

   Comparez l'aire ajoutée par le jardinier (avec son jardin carré) et l'aire ajoutée par son voisin (avec son jardin rectangulaire). Que constatez-vous ?
4. Pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire du jardin agrandi du jardinier est-elle exactement le double de l'aire de son jardin initial ?

Exercice 3

Léa remarque quelque chose d'étonnant en jouant avec les nombres :

$$3 \times 5 = 15 \quad \text{et} \quad 4^2 = 16 \quad \rightarrow \quad \text{différence de 1}$$
$$5 \times 7 = 35 \quad \text{et} \quad 6^2 = 36 \quad \rightarrow \quad \text{différence de 1}$$
$$10 \times 12 = 120 \quad \text{et} \quad 11^2 = 121 \quad \rightarrow \quad \text{différence de 1}$$

Elle formule alors une conjecture : « *Quand on multiplie deux nombres impairs consécutifs, on obtient toujours un nombre qui est inférieur de 1 au carré du nombre pair qui se trouve entre les deux.* »

1. Vérifiez la conjecture de Léa avec d'autres exemples de votre choix.
2. Léa a-t-elle raison ? Prouvez votre réponse de manière générale pour n'importe quels nombres impairs consécutifs.
3. Son frère Tom affirme : « *Moi aussi j'ai trouvé quelque chose ! Le produit de deux nombres pairs consécutifs est toujours inférieur de 2 au carré du nombre impair qui se trouve entre eux.* »

Par exemple : $2 \times 4 = 8$ et $3^2 = 9$ (différence de 1... attendez, ce n'est pas 2 !)

Tom s'est-il trompé dans sa conjecture ou dans son exemple ? Que pouvez-vous dire de sa conjecture ?

4. Peut-on généraliser ce résultat ? Que se passe-t-il quand on multiplie deux nombres quelconques qui diffèrent de 2 ? Et s'ils diffèrent de 3 ? Trouvez une règle générale.

Exercice 4

Un magicien propose le tour suivant à son public :

1. « Choisissez un nombre entier en secret »
2. « Ajoutez 5 à ce nombre »
3. « Multipliez le résultat par lui-même (mettez-le au carré) »
4. « Maintenant, prenez votre nombre initial, enlevez-lui 5, et multipliez ce résultat par lui-même »
5. « Calculez la différence entre les deux carrés que vous avez obtenus »
6. « Divisez le résultat par 10 »
7. Le magicien annonce : « Je devine votre nombre de départ ! »

Le magicien demande uniquement le résultat final et annonce immédiatement le nombre de départ choisi par la personne.

1. Testez ce tour avec plusieurs nombres de votre choix. Que remarquez-vous ?
2. Comment le magicien fait-il pour retrouver le nombre de départ ? Expliquez son secret.
3. Le magicien décide de modifier son tour. Il demande maintenant :
   — d'ajouter 7 au nombre initial (au lieu de 5)
   — de soustraire 7 au nombre initial (au lieu de 5)
   — et de diviser par un certain nombre à la fin

   Par quel nombre doit-il faire diviser pour que le tour fonctionne encore ?
4. Créez votre propre tour de magie en choisissant le nombre à ajouter et soustraire. Expliquez comment il fonctionne.
5. **Défi :** Le magicien veut corser son tour. Il demande d'ajouter un nombre a et de soustraire un nombre b différent (avec $a \neq b$). Peut-il encore retrouver le nombre de départ ? Si oui, quelle information supplémentaire doit-il demander ?

Exercice 5

Effectue les calculs suivants et continue sur le même modèle

$2^2 - 1^2 =$

$3^2 - 2^2 =$

$4^2 - 3^2 =$

$\ldots\ldots$

Que constates-tu ? Prouve-le.

Exprime la propriété trouvée par une phrase.

Quand la propriété est énoncée, proposer la question suivante :

Écrire 15, puis 57, puis 349 comme différence des carrés de 2 entiers consécutifs.