



RÉSOLUTION DE PROBLÈMES - Version Intermédiaire

Rappels utiles :

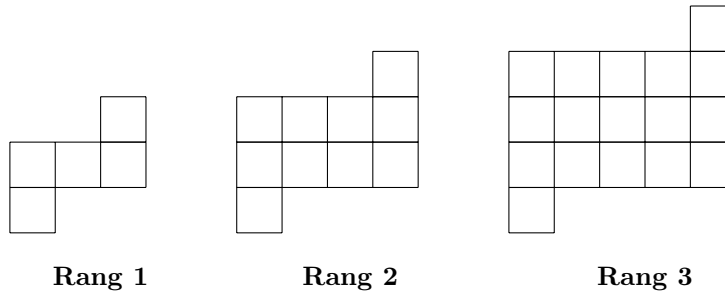
$$(a + b)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(a - b)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(a + b)(a - b) = \underline{\hspace{2cm}}$$

Exercice 1

Avec des petits carrés tous identiques, on construit un pattern selon le modèle évolutif ci-dessous.



- Dénombez les carrés pour les rangs 1, 2 et 3.
- Trouvez **trois manières différentes** de calculer le nombre de petits carrés au rang a (avec $a \in \mathbb{N}$). Pour chaque méthode :
 - Expliquez comment vous voyez la figure (par exemple : "grand" carré moins deux rectangles, somme de rectangles, etc.)
 - Écrivez l'expression algébrique correspondante

Indication : Pensez à identifier des formes géométriques simples dans la figure.
- Développez et réduisez chacune de vos trois expressions pour prouver qu'elles sont toutes égales.

Exercice 2

Un jardinier possède un terrain carré de côté x mètres. Il décide d'agrandir son jardin en ajoutant une bande de 3 mètres de large tout autour du terrain initial.

- Faites un schéma clair de la situation en indiquant toutes les dimensions pertinentes.
- Le jardinier affirme : « L'aire que j'ai ajoutée est exactement égale à 6 fois le périmètre de mon jardin initial plus 36 m^2 . »

Pour vérifier cette affirmation :

 - Exprimez l'aire du jardin initial en fonction de x .
 - Exprimez l'aire du jardin agrandi en fonction de x .
 - Déduisez-en l'aire ajoutée et développez cette expression.
 - Calculez $6P + 36$ où P est le périmètre du jardin initial.
 - Concluez : le jardinier a-t-il raison ?
- Un voisin possède un jardin rectangulaire de dimensions x mètres sur $(x + 6)$ mètres. Il souhaite lui aussi ajouter une bande de 3 mètres tout autour.
 - Calculez l'aire ajoutée par le voisin.
 - Développez cette expression et comparez-la avec l'aire ajoutée par le jardinier.
 - Que constatez-vous ? Comment pouvez-vous expliquer ce résultat ?

4. Pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire du jardin agrandi du jardinier est-elle exactement le double de l'aire de son jardin initial ?

Indication : Posez une équation et utilisez les identités remarquables pour la résoudre.

Exercice 3

Léa remarque quelque chose d'étonnant en jouant avec les nombres :

$$3 \times 5 = 15 \quad \text{et} \quad 4^2 = 16 \quad \rightarrow \quad \text{différence de } 1$$

$$5 \times 7 = 35 \quad \text{et} \quad 6^2 = 36 \quad \rightarrow \quad \text{différence de } 1$$

$$10 \times 12 = 120 \quad \text{et} \quad 11^2 = 121 \quad \rightarrow \quad \text{différence de } 1$$

Elle formule alors une conjecture : « *Quand on multiplie deux nombres impairs consécutifs, on obtient toujours un nombre qui est inférieur de 1 au carré du nombre pair qui se trouve entre les deux.* »

1. Vérifiez la conjecture de Léa avec deux autres exemples de votre choix.
2. Prouvez la conjecture de Léa de manière générale.

Indication : Notez n un nombre pair quelconque, exprimez les deux nombres impairs qui l'encadrent, puis calculez leur produit et comparez-le à n^2 .

3. Son frère Tom affirme : « *Moi aussi j'ai trouvé quelque chose ! Le produit de deux nombres pairs consécutifs est toujours inférieur de 2 au carré du nombre impair qui se trouve entre eux.* »

Il donne l'exemple : $2 \times 4 = 8$ et $3^2 = 9$

- (a) Quelle est l'erreur dans le raisonnement de Tom ?
 - (b) Corrigez sa conjecture et prouvez-la.
4. Généralisez ces résultats :
 - (a) Que se passe-t-il quand on multiplie deux nombres quelconques qui diffèrent de 2 ? Établissez une formule générale et prouvez-la.
 - (b) Même question si les deux nombres diffèrent de 3.
 - (c) Pouvez-vous trouver une règle générale pour deux nombres qui diffèrent de k ?

Indication : Utilisez l'identité remarquable $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

Exercice 4

Un magicien propose le tour suivant à son public :

- Choisissez un nombre n
- Ajoutez 5 : _____
- Mettez au carré : _____
- Prenez n , enlevez 5 : _____
- Mettez au carré : _____
- Faites la différence : _____
- Divisez par 10 : _____

Le magicien demande uniquement le résultat final et annonce immédiatement le nombre de départ choisi par la personne.

1. Testez ce tour avec trois nombres différents de votre choix. Que remarquez-vous entre le nombre de départ et le résultat final ?

- Expliquez le secret du magicien en développant algébriquement toutes les étapes du tour avec un nombre n quelconque.

Indication : Calculez $(n + 5)^2 - (n - 5)^2$ puis divisez par 10.

- Le magicien décide de modifier son tour. Il demande maintenant d'ajouter 7 au nombre initial (au lieu de 5) et de soustraire 7 au nombre initial (au lieu de 5).

Par quel nombre doit-il faire diviser à la fin pour que le tour fonctionne encore ? Justifiez votre réponse par un calcul algébrique.

- Créez votre propre variante du tour de magie :
 - Choisissez le nombre à ajouter et soustraire.
 - Déterminez par quel nombre il faut diviser.
 - Expliquez le principe général de votre tour.

Exercice 5

Effectuez les calculs suivants et continuez sur le même modèle :

$$2^2 - 1^2 =$$

$$3^2 - 2^2 =$$

$$4^2 - 3^2 =$$

$$5^2 - 4^2 =$$

...

- Que constatez-vous ? Formulez une conjecture sur la différence des carrés de deux entiers consécutifs.
- Prouvez votre conjecture de manière générale.

Indication : Notez n et $n + 1$ deux entiers consécutifs, calculez $(n + 1)^2 - n^2$ et développez.
- Exprimez la propriété trouvée par une phrase claire et complète.
- Application : En utilisant votre propriété, écrivez les nombres suivants comme différence des carrés de deux entiers consécutifs :

- 15

Pour écrire 15 comme différence de carrés :

— On cherche n tel que $2n + 1 = 15$

— Donc $n =$ _____

— $15 =$ _____² - _____²

- 57

- 349

- 2025

- Question bonus :** Tous les nombres impairs peuvent-ils s'écrire comme la différence de deux carrés consécutifs ? Et les nombres pairs ? Justifiez votre réponse.