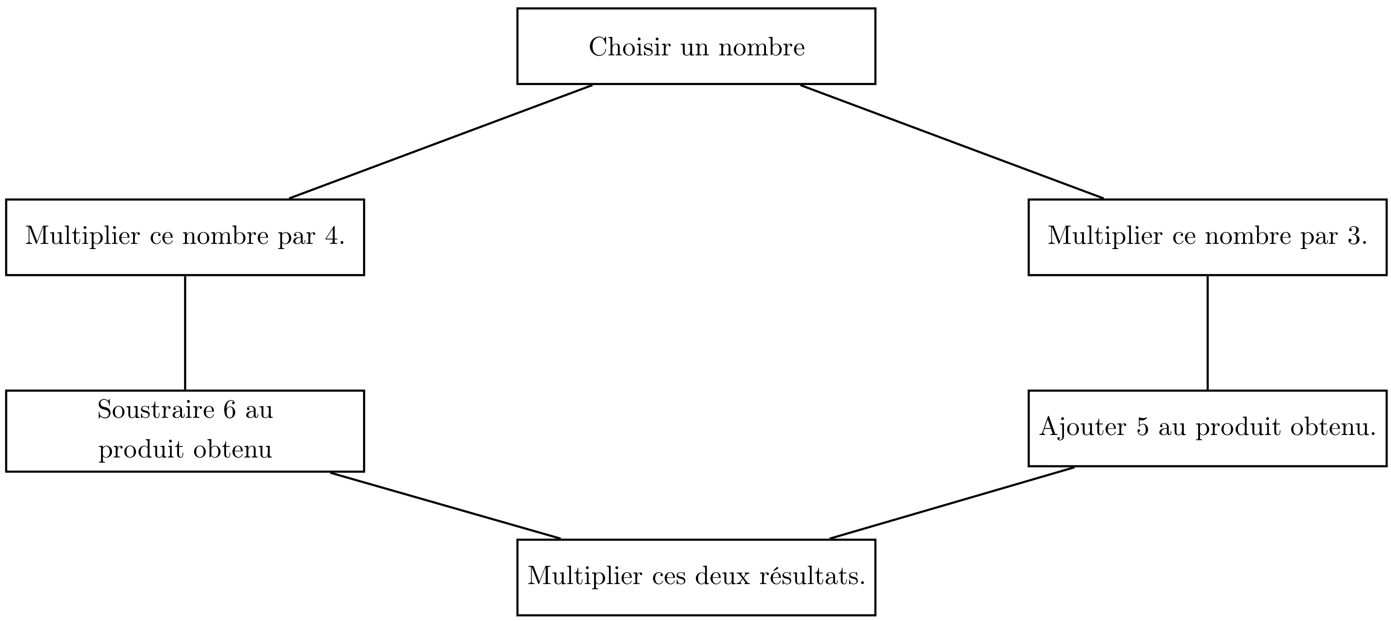
RÉSOLUTION DE PROBLÈMES - Version Intermédiaire

Source : *Banque de problèmes du CSEN*

Exercice 1

Voici un arbre de calcul et deux programmes de calcul :



Programme A	**Programme B**
— Choisir un nombre. — Calculer le carré de ce nombre. — Multiplier le résultat par 10. — Soustraire 18 au résultat.	— Choisir un nombre. — Calculer le carré de ce nombre. — Multiplier le résultat par 12. — Lui ajouter le double du nombre de départ. — Soustraire 30 au résultat.

Chacune des affirmations suivantes est-elle vraie ou fausse ? Justifier chaque réponse.

Affirmation 1 : En choisissant 2 comme nombre de départ, on obtient le même résultat avec l'arbre et les deux programmes de calcul.

Indication : Effectuez les calculs numériques pour chacun des trois programmes.

Affirmation 2 : Quel que soit le nombre choisi au départ, l'arbre de calcul et le programme A donnent le même résultat.

- ☐ Traduisez l'arbre de calcul en une expression algébrique avec x comme nombre de départ.
- ☐ Développez cette expression.
- ☐ Traduisez le programme A en une expression algébrique.
- ☐ Comparez les deux expressions obtenues et concluez.

Affirmation 3 : Quel que soit le nombre choisi au départ, l'arbre de calcul et le programme B donnent le même résultat.

- ☐ Traduisez le programme B en une expression algébrique avec x.
- ☐ Réduisez cette expression.
- ☐ Comparez avec le résultat de l'arbre de calcul et concluez.

Exercice 2
Voici un programme de calcul : Je pense à un nombre, j'enlève 12. Je multiplie le tout par 7. J'ajoute 50. J'ajoute 3 fois le nombre de départ et j'ajoute 34.
Si tu donnes n'importe quel nombre à Apolline, elle trouve tout de suite le résultat, sans faire tous les calculs.

1. Testez le programme avec deux nombres de votre choix pour vous familiariser avec celui-ci.
2. Traduisez le programme en une expression algébrique avec x comme nombre de départ.
3. Développez et réduisez cette expression au maximum.
4. Expliquez le secret d'Apolline : comment peut-elle calculer si rapidement le résultat ?

Indication : Une fois l'expression développée et réduite, que constatez-vous ?

Exercice 3
Voici trois programmes de calcul :

Prog 1	**Prog 2**	**Prog 3**
Je pense à un nombre, je lui ajoute 7. Je multiplie le tout par 5	Je pense à un nombre, je le multiplie par 5. J'ajoute 7	Je pense à un nombre, je le multiplie par 5. J'ajoute 35

1. Choisissez un nombre et appliquez-lui les trois programmes.
2. Recommencez avec un ou deux autres nombres.
3. Que constatez-vous ? Écrivez une conjecture.
4. Prouvez votre conjecture en traduisant chaque programme par une expression algébrique, puis en les développant et réduisant.

Exercice 4
Voici un programme de calcul :

- Je choisis 2 nombres quelconques
- Je calcule, pour chacun son carré
- Je calcule la somme des carrés
- J'ajoute au résultat deux fois le produit des nombres de départ

1. Faites fonctionner ce programme de calcul pour au moins trois couples de nombres différents.
2. Observez attentivement les résultats obtenus. Que remarquez-vous ? Énoncez une conjecture.
3. Traduisez le programme par une expression algébrique avec deux variables x et y.
4. Quelle identité remarquable reconnaissez-vous dans cette expression ?
5. Conclure pour prouver votre conjecture.

Exercice 5
On a demandé à toute une classe de calculer la somme de 4 nombres entiers consécutifs (qui se suivent).
Trois élèves ont établi les conjectures suivantes :

Jean affirme que :	**Marie affirme que :**	**Aristide affirme que :**
« Le résultat est toujours un multiple de 4. »	« Quels que soient les nombres choisis au départ, cela revient à multiplier le premier nombre par 4 et à lui ajouter 6. »	« Quels que soient les nombres choisis au départ, le résultat sera toujours un résultat de la table de 2. »

1. Testez chacune de ces trois affirmations avec un exemple numérique de votre choix.
2. Pour vérifier ces affirmations de manière générale :
   (a) Notez n le premier des quatre nombres consécutifs. Exprimez les trois autres en fonction de n.
   (b) Écrivez l'expression de la somme des quatre nombres en fonction de n.
   (c) Réduisez cette expression.
3. Utilisez l'expression obtenue pour vérifier si chacune des trois affirmations est vraie ou fausse. Justifiez soigneusement chaque réponse.

Indication : Pour vérifier qu'un nombre est un multiple de k ($k \in \mathbb{Z}$), il faut pouvoir l'écrire sous la forme "$k \times$ (quelque chose)".

Exercice 6
Voici un programme de calcul :

— Je choisis 3 nombres consécutifs
— Je calcule le carré du nombre du milieu
— Je soustrais le produit des deux autres nombres.

Si tu donnes n'importe quel ensemble de trois nombres consécutifs à Victor, il trouve tout de suite le résultat, sans faire tous les calculs.

1. Testez ce programme avec au moins trois ensembles différents de nombres consécutifs (par exemple : 5, 6, 7 puis 10, 11, 12, etc.).
2. Que constatez-vous ? Formulez une conjecture sur le résultat obtenu.
3. Pour expliquer et prouver le secret de Victor :
   (a) Notez n le nombre du milieu. Exprimez les deux autres nombres en fonction de n.
   (b) Traduisez le programme en une expression algébrique.
   (c) Développez et réduisez cette expression.
   (d) Concluez.
4. Expliquez en une phrase comment Victor peut trouver instantanément le résultat.

Question bonus : Pourrait-on généraliser ce résultat ? Que se passerait-il si on choisissait 5 nombres consécutifs et qu'on calculait le carré du nombre du milieu moins le produit de tous les autres ?