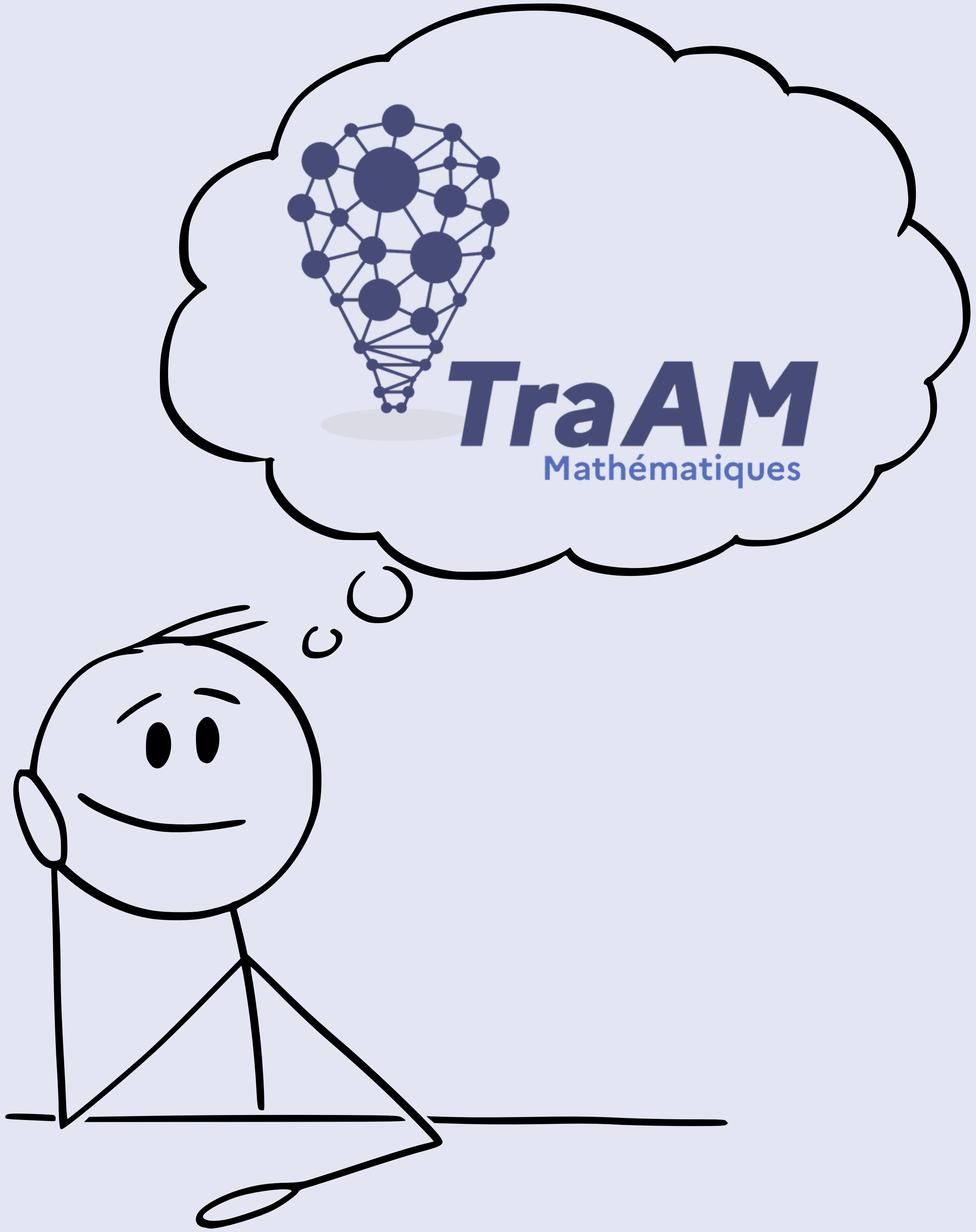
ACADÉMIE
DE LILLE
*Liberté
Égalité
Fraternité*

# Pré-algébrisation

du CMI à la 2nd

# LES IDENTITÉS REMARQUABLES



# LES IDENTITÉS REMARQUABLES

**Test** : Démarrons par un petit test de positionnement sur le calcul littéral

---

**Question 1:** L'expression réduite de $-7x \times (-6)$ est égal à :

- ☐ $-13x$
- ☐ $42x$
- ☐ $-42x$
- ☐ cela dépend de la valeur de $x$

**Brouillon:**

---

**Question 2:** L'expression réduite de $4x + 2 - 11x + 2$ est égal à :

- ☐ $-7x$
- ☐ $-15x + 4$
- ☐ $6x - 13x$
- ☐ $-7x + 4$

**Brouillon:**

---

**Question 3:** Parmi ces égalités, laquelle est fausse ?

- ☐ $2(x^2 - 4) = 2x^2 - 8$
- ☐ $4x^2 \times x = 4x^3$
- ☐ $(2x)^2 = 2x^2$
- ☐ $(x + 1)(x - 2) = x^2 - x - 2$

**Brouillon:**

---

**Question 4:** L'expression réduite de $(3x^2 + 5) - (6x + 4)$ est égal à :

- ☐ $3x^2 - 6x + 1$
- ☐ $3x^2 + 6x - 1$
- ☐ $3x^2 - 6x + 9$
- ☐ $18x^3 + 12x^2 - 30x + 20$

**Brouillon:**

---

**Question 5:** L'expression réduite de $-(7y - 6) + (3y - 6)$ est égal à :

- ☐ $-4y - 12$
- ☐ $-10y$
- ☐ $-10y + 12$
- ☐ $-4y$

**Brouillon:**

---

**Question 6:** Le développement de $(x + 3)(2x - 5)$ est :

- ☐ $3x - 2$
- ☐ $3x - 15$
- ☐ $2x^2 + 11x + 15$
- ☐ $2x^2 + x - 15$

**Brouillon:**

---

**Question 7:** La forme factorisée de $10a + a^2$ est :

- ☐ $10a^3$
- ☐ $12a$
- ☐ $10a(a)$
- ☐ $a(10 + a)$

**Brouillon:**

---

**Question 8:** Soit $x = 3$. Calculer $2x^2$.

- ☐ 12
- ☐ 18
- ☐ 36
- ☐ $23^2$

**Brouillon:**

---

**Auto-correction du Test**

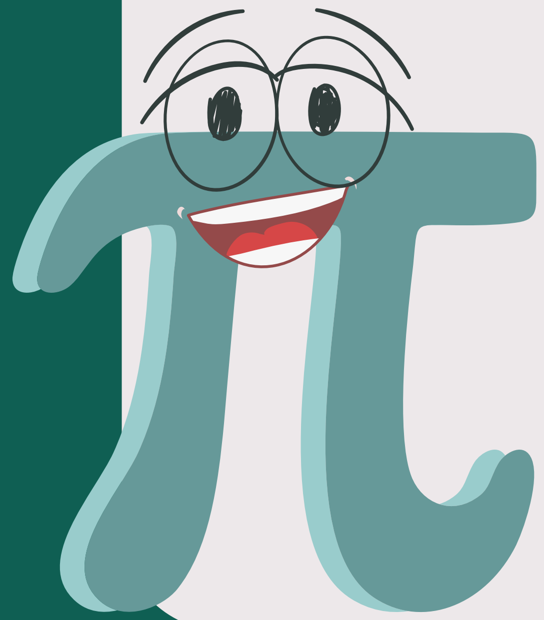
| Question | Réponse | J'ai su faire seul | J'ai su faire avec de l'aide | Je ne maîtrise pas encore |
|---|---|---|---|---|
| 1. | $42x$. En effet $-7x \times (-6) = (-7) \times x \times (-6) = (-7) \times (-6) \times x = 42 \times x = 42x$ | | | |
| 2. | $-7x + 4$. $4x + 2 - 11x + 2 = 4x - 11x + 2 + 2 = (4x - 11x) + (2 + 2) = -7x + 4$ | | | |
| 3. | $(2x)^2 \neq 2x^2$. Appliquons la propriété sur les puissances : $(2x)^2 = 2^2 \times x^2 = 4x^2$ | | | |
| 4. | $3x^2 - 6x + 1$. On commence par retirer les parenthèses en faisant attention au moins devant la seconde parenthèse : $(3x^2 + 5) - (6x + 4) = (3x^2 + 5) + (-1) \times (6x + 4) = 3x^2 + 5 - 6x - 4 = 3x^2 - 6x + 1$ | | | |
| 5. | $-4y$. On commence par retirer les parenthèses en faisant attention au moins devant la première parenthèse : $-(7y - 6) + (3y - 6) = (-1) \times (7y - 6) + (3y - 6) = -7y + 6 + 3y - 6 = -7y + 3y + 6 - 6 = -4y$. | | | |
| 6. | $2x^2 + x - 15$. On applique la double distributivité en faisant attention au signe de chaque terme : $(x + 3)(2x - 5) = 2x^2 - 5x + 6x - 15 = 2x^2 + 1x - 15 = 2x^2 + x - 15$ | | | |
| 7. | $a(10a + a)$. Factoriser, c'est transformer la somme en un produit : $10a + a^2 = 10 \times a + a \times a = a \times (10 + a)$ | | | |
| 8. | $18$. Attention aux priorités opératoires, le carré est prioritaire sur le produit : $2x^2 = 2 \times 3^2 = 2 \times 9 = 18$ | | | |

**Scanne le QR-code ci-contre pour t'entraîner sur des exercices sur la double distributivité**

**Scanne le QR-code ci-contre pour t'entraîner sur des exercices sur la factorisation de certaines expressions littérales**

**Scanne le QR-code ci-contre pour t'entraîner sur des exercices de suppression de parenthèses dans une expression littérale**

# DÉCOUVRONS LES IDENTITÉS REMARQUABLES



# IDENTITÉ REMARQUABLE $(A+B)^2$

## Je développe

Soit $x$ un nombre réel.

Développer $A = (x+3)^2$

$$(x+3)^2$$
$$= x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2$$
$$= x^2 + 6x + 9$$

Développer $B = (3x+5)^2$

$$(3x+5)^2$$
$$= (3x)^2 + 2 \times 3x \times 5 + 5^2$$
$$= 9x^2 + 30x + 25$$

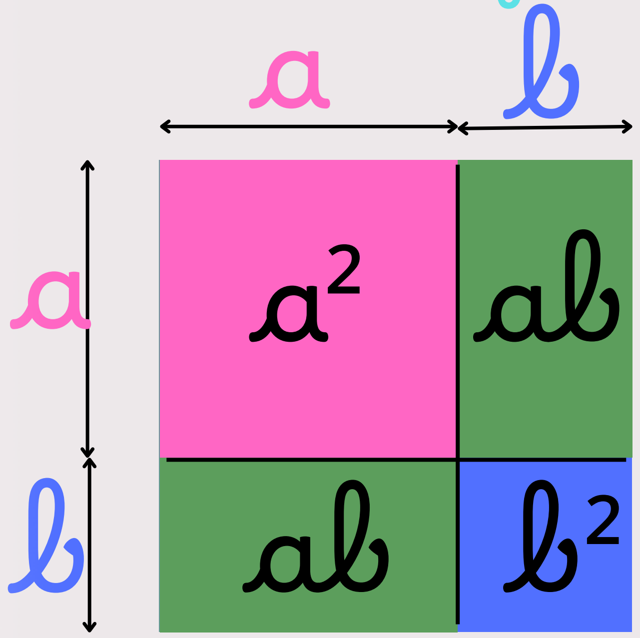
$$(3x)^2 \neq 3x^2$$

Soient a et b deux nombres réels

Je développe

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Je factorise




SCAN ME!

## Je factorise

Soit $x$ un nombre réel.

Factoriser $C = x^2 + 10x + 25$

$$x^2 + 10x + 25$$
$$= x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2$$
$$= (x+5)^2$$

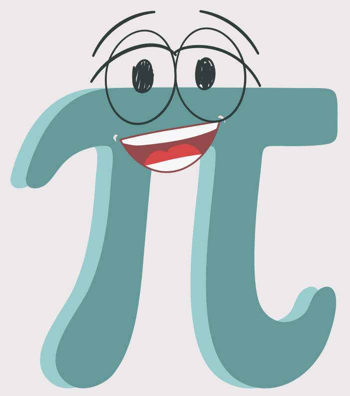
Factoriser $D = 16x^2 + 48x + 36$

$$16x^2 + 48x + 36$$
$$= (4x)^2 + 2 \times 4x \times 6 + 6^2$$
$$= (4x+6)^2$$

Lorsqu'on factorise une expression à l'aide des identités remarquables, il est plus facile de commencer par identifier a et b.

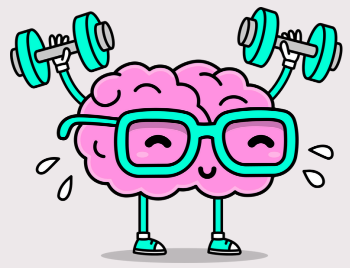
# EXERCICES D'APPLICATION

## Développer les expressions littérales de la forme $(a+b)^2$



Pour le calcul mental

SCAN ME!



**LEVEL 1**

$a = x$

Exercice pour développer l'expression $(a+b)^2$ dans le cas où $a=x$.

SCAN ME

**LEVEL 2**

$a = kx$ avec $k \in \mathbb{N}$

Exercice guidé: Texte à trous pour développer l'identité remarquable dans le cas où a est de la forme $kx$.

SCAN ME

**LEVEL 3**

$a = kx$ avec $k \in \mathbb{N}$

Exercice pour développer l'expression $(a+b)^2$ dans le cas où $a=kx$ avec $k$ un entier positif.

SCAN ME

**LEVEL 4**

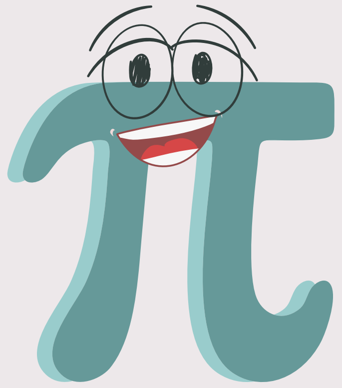
$a = kx$ avec $k \in \mathbb{Q}$

Exercice pour développer l'expression $(a+b)^2$ dans le cas où $a=kx$ avec $k$ un nombre rationnel.

SCAN ME

# EXERCICES D'APPLICATION

## Factoriser les expressions littérales de la forme $a^2+2ab+b^2$



**1 LEVEL** — $a = x$

Exercice pour factoriser des expressions de la forme $x^2+2bx+b^2$

SCAN ME

**2 LEVEL** — $a = kx$ avec $k \in \mathbb{N}$

Exercice guidé: Texte à trous pour factoriser une identité remarquable dans le cas où a est de la forme kx.

SCAN ME

**3 LEVEL** — $a = kx$ avec $k \in \mathbb{N}$

Exercice pour factoriser des expressions de la forme $a^2+2ab+b^2$ dans le cas où $a=kx$ avec $k$ un entier positif.

SCAN ME

**4 LEVEL** — $x^2+2bx+b^2$ avec $b \in \mathbb{Q}$

Complète les expressions afin de trouver un carré parfait de la forme $x^2+2bx+b^2$

SCAN ME

# Identité remarquable $(a-b)^2$

## Je développe

Soit $x$ un nombre réel.

Développer $A = (x-3)^2$

$(x-3)^2$

$= x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2$

$= x^2 - 6x + 9$

Développer $B = (3x-5)^2$

$(3x-5)^2$

$= (3x)^2 - 2 \times 3x \times 5 + 5^2$

$= 9x^2 - 30x + 25$

$(3x)^2 \neq 3x^2$

Soient $a$ et $b$ deux nombres réels

Je développe

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Je factorise

| $\times$ | $a$ | $-b$ |
|---|---|---|
| $a$ | $a^2$ | $-ab$ |
| $-b$ | $-ab$ | $b^2$ |

SCAN ME!

## Je factorise

Soit $x$ un nombre réel.

Factoriser $C = x^2 - 10x + 25$

$x^2 - 10x + 25$

$= x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2$

$= (x-5)^2$

Factoriser $D = 16x^2 - 48x + 36$

$16x^2 - 48x + 36$

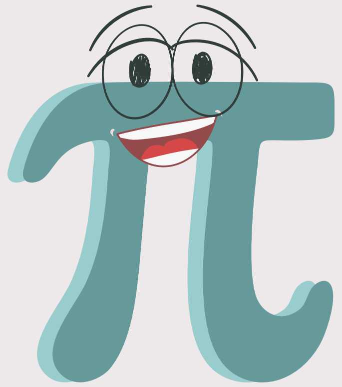
$= (4x)^2 - 2 \times 4x \times 6 + 6^2$

$= (4x-6)^2$

Lorsqu'on factorise une expression à l'aide des identités remarquables, il est plus facile de commencer par identifier $a$ et $b$.

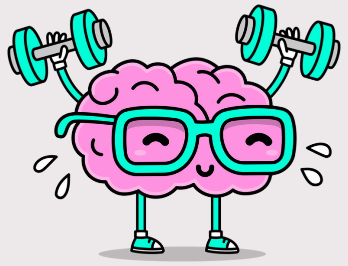
# EXERCICES D'APPLICATION

## Développer les expressions littérales de la forme $(a-b)^2$



Pour le calcul mental

SCAN ME!



**1 LEVEL** — $a = x$

Exercice pour développer l'expression $(a-b)^2$ dans le cas où $a=x$.

SCAN ME

**2 LEVEL** — $a = kx$ avec $k \in \mathbb{N}$

Exercice guidé: Texte à trous pour développer l'identité remarquable dans le cas où a est de la forme $kx$.

SCAN ME

**3 LEVEL** — $a = kx$ avec $k \in \mathbb{N}$

Exercice pour développer l'expression $(a-b)^2$ dans le cas où $a=kx$ avec $k$ un entier positif.

SCAN ME

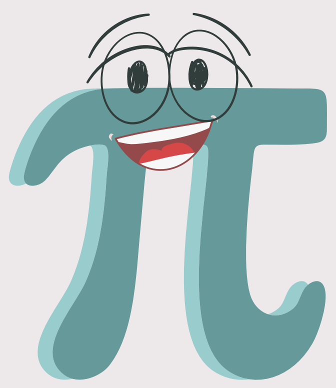
**4 LEVEL** — $a = kx$ avec $k \in \mathbb{Q}$

Exercice pour développer l'expression $(a-b)^2$ dans le cas où $a=kx$ avec $k$ un nombre rationnel.

SCAN ME

# EXERCICES D'APPLICATION

## Factoriser les expressions littérales de la forme $a^2-2ab+b^2$



1 LEVEL

$a = x$

Exercice pour factoriser des expressions de la forme $x^2-2bx+b^2$

SCAN ME

2 LEVEL

$a = kx$ avec $k \in \mathbb{N}$

Exercice guidé: Texte à trous pour factoriser une identité remarquable dans le cas où a est de la forme $kx$.

SCAN ME

3 LEVEL

$a = kx$ avec $k \in \mathbb{N}$

Exercice pour factoriser des expressions de la forme $a^2-2ab+b^2$ dans le cas où $a=kx$ avec $k$ un entier positif.

SCAN ME

4 LEVEL

$x^2-2bx+b^2$ avec $b \in \mathbb{Q}$

Complète les expressions afin de trouver un carré parfait de la forme $x^2-2bx+b^2$

SCAN ME

# IDENTITÉ REMARQUABLE (A-B)(A+B)

Soient a et b deux nombres réels

Je développe

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

Je factorise

| $\times$ | $a$ | $-b$ |
|---|---|---|
| $a$ | $a^2$ | $\cancel{-ab}$ |
| $+b$ | $\cancel{+ab}$ | $-b^2$ |

SCAN ME!

## Je développe

Soit $x$ un nombre réel.

Développer $A = (x-3)(x+3)$

$(x-3)(x+3)$

$= x^2 - 3^2$

$= x^2 - 9$

Développer $B = (3x+5)(3x-5)$

$(3x+5)(3x-5)$

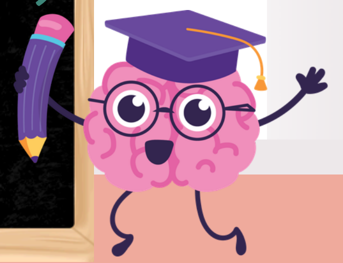
$= (3x)^2 - 5^2$

$= 9x^2 - 25$

Par commutativité de la multiplication :

$(a-b)(a+b) = (a+b)(a-b)$

comme $2\times3 = 3\times2$ !



## Je factorise

Soit $x$ un nombre réel.

Factoriser $C = x^2 - 25$

$x^2 - 25$

$= x^2 - 5^2$

$= (x-5)(x+5)$

Factoriser $D = 16x^2 - 36$

$16x^2 - 36$

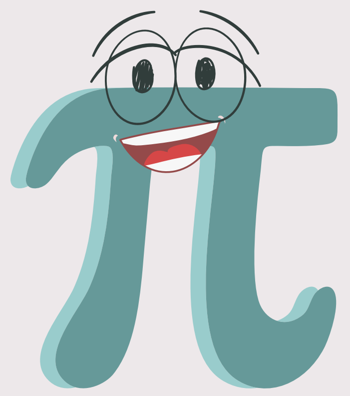
$= (4x)^2 - 6^2$

$= (4x+6)(4x-6)$

Lorsqu'on factorise une expression à l'aide des identités remarquables, il est plus facile de commencer par identifier a et b.

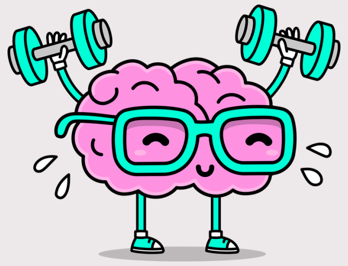
# EXERCICES D'APPLICATION

## Développer les expressions littérales de la forme (a-b)(a+b)



Pour le calcul mental

SCAN ME!



1 LEVEL

a = x

Exercice pour développer l'expression (a-b)(a+b) dans le cas où a=x.

SCAN ME

2 LEVEL

a = kx avec k ∈ N

Exercice guidé: Texte à trous pour développer l'identité remarquable dans le cas où a est de la forme kx.

SCAN ME

3 LEVEL

a = kx avec k ∈ N

Exercice pour développer l'expression (a+b)(a-b) dans le cas où a=kx avec k un entier positif.

SCAN ME

4 LEVEL

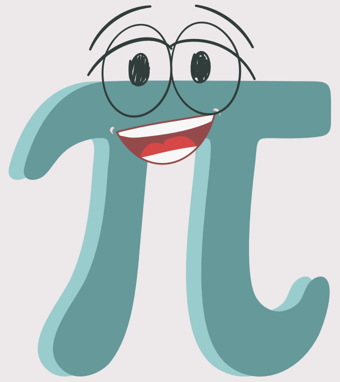
a = kx avec k ∈ Q

Exercice pour développer l'expression (a-b)(a+b) dans le cas où a=kx avec k un nombre rationnel.

SCAN ME

# EXERCICES D'APPLICATION

## Factoriser les expressions littérales de la forme $a^2-b^2$



**1 LEVEL** — $a = x$

Exercice pour factoriser des expressions de la forme $x^2-b^2$

SCAN ME

**2 LEVEL** — $a$ ou $b$ $= kx$ avec $k \in \mathbb{N}$

Exercice pour factoriser des expressions de la forme $a^2-b^2$ dans le cas où $a$ ou $b$ est de la forme $kx$, avec $k$ un entier.

SCAN ME

**3 LEVEL** — $a$ ou $b$ $= kx$ avec $k \in \mathbb{Q}$

Exercice pour factoriser des expressions de la forme $a^2-b^2$ dans le cas où $a$ ou $b$ est de la forme $kx$, avec $k$ un rationnel.

SCAN ME

**4 LEVEL** — $(ax+b)^2-c^2$

Exercice pour factoriser des expressions de la forme $(ax+b)^2-c^2$

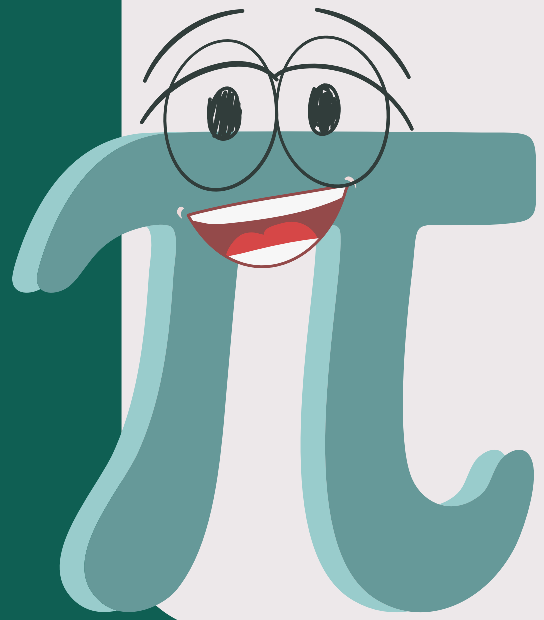
SCAN ME

**5 LEVEL** — $(ax+b)^2-(cx+d)^2$

Exercice pour factoriser des expressions de la forme $(ax+b)^2-(cx+d)^2$

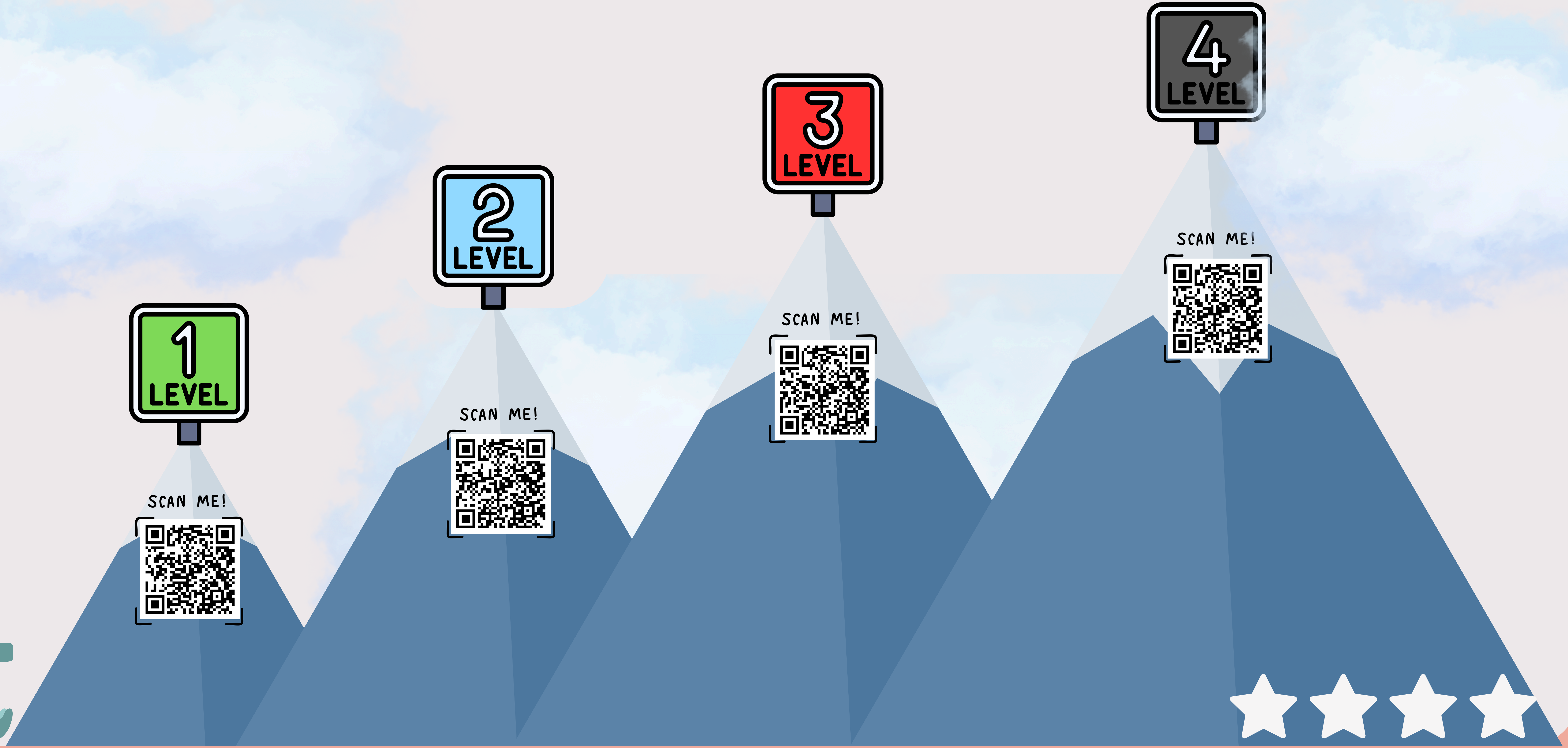
SCAN ME

Maintenant que nous avons découvert les identités remarquables une par une, mélangeons tout !



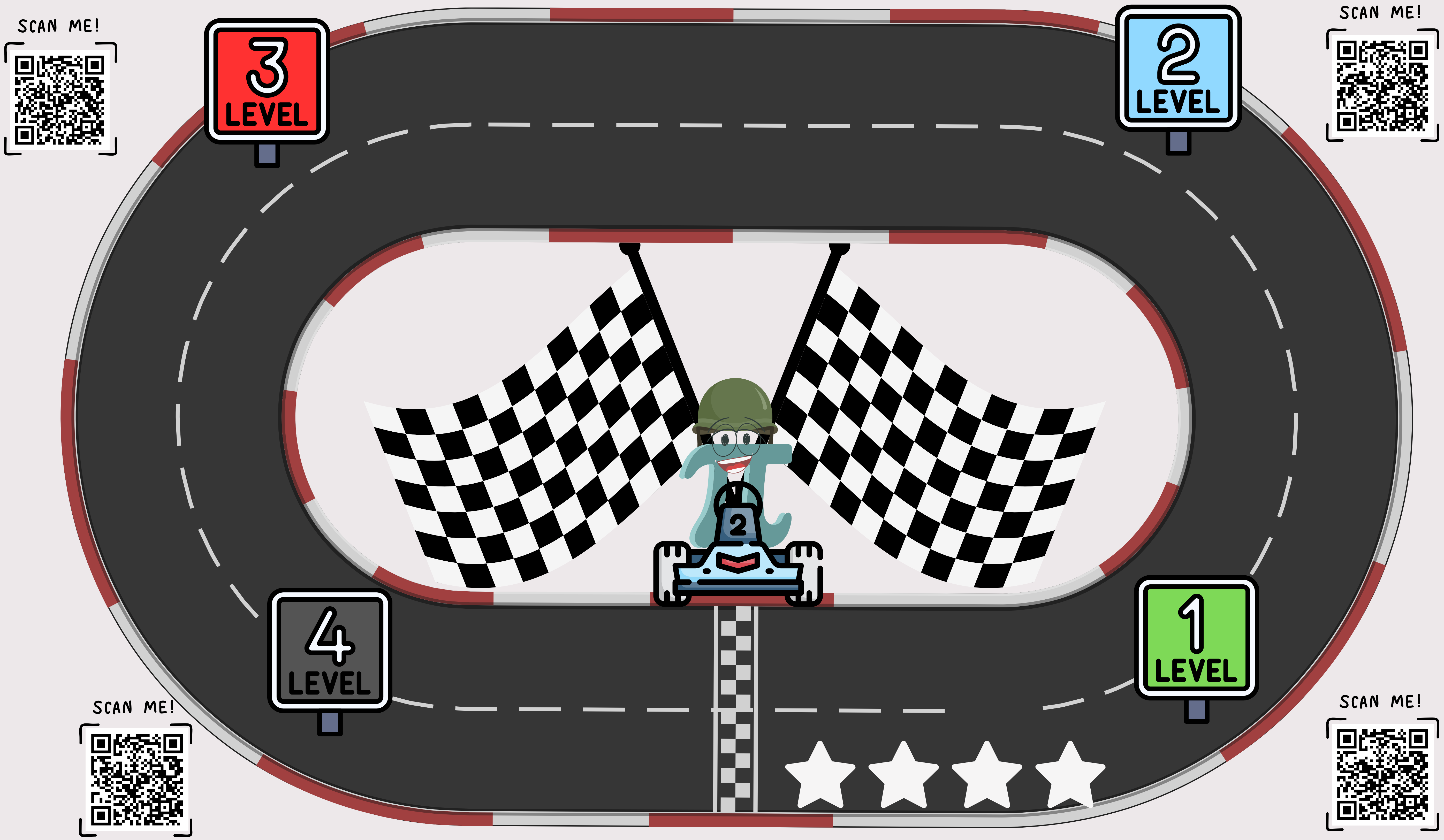
# EXERCICES D'APPLICATION

Compétence 1 : Savoir reconnaître les formes factorisées et les formes développées




# EXERCICES D'APPLICATION

<u>Compétence 2:</u> Savoir reconnaître un produit remarquable



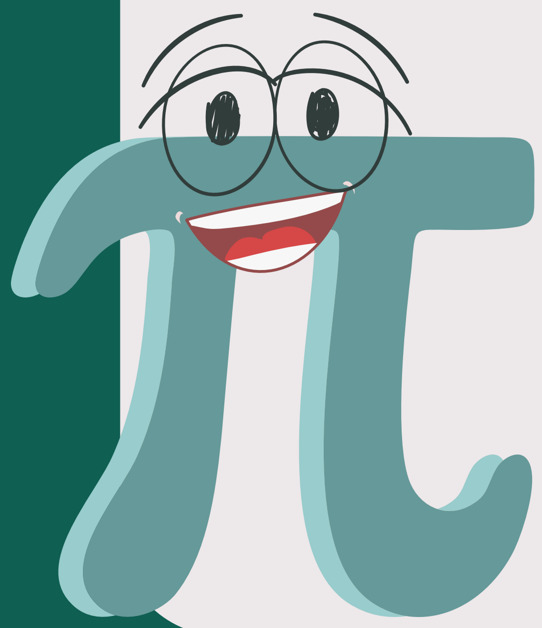
# EXERCICES D'APPLICATION

Compétence 3: Savoir associer les paires d'identités remarquables

# EXERCICES D'APPLICATION

Compétence 4: Savoir développer des expressions littérales à l'aide des identités remarquables

# Maintenant il est l'heure de faire le bilan



# Fiche BILAN : LES IDENTITÉS REMARQUABLES

**Test Bilan** : Réponds aux questions suivantes et remets la fiche Bilan à ton professeur. Attention plusieurs réponses sont possibles.

---

**Question 1:** Parmi les expressions littérales suivantes, coche celles qui sont sous forme développée réduite :

- ☐ $5x + 6$
- ☐ $(5x + 7)^2$
- ☐ $4 + 4t + 5t^2$
- ☐ $(x + 3)(5x + 8) + 7$
- ☐ $4w^2 + 7x + 28u$
- ☐ $(x + 7)(t - 6)$

---

**Question 2:** Parmi les expressions littérales suivantes, coche celles qui sont sous forme factorisée :

- ☐ $x(5x + 6)$
- ☐ $(5x + 7)^2$
- ☐ $(x - 7)(x + 6) + (x - 7)(4 + 2x)$
- ☐ $(x + 3)(5x + 8) + 7$
- ☐ $(4w^2 + 2) + (7x + 28u)$
- ☐ $(7 + x)(t - 6)$

---

**Question 3:** La forme développée de l'identité remarquable $(x + 7)^2$ est :

- ☐ $x^2 + 49$
- ☐ $x^2 + 14x + 49$
- ☐ $14x + 49 + x^2$
- ☐ $x^2 + 7x + 49$

---

**Question 4:** La forme factorisée de l'identité remarquable $16x^2 - 49$ est :

- ☐ $(4x - 7)^2$
- ☐ $(4x - 7)(4x + 7)$
- ☐ $(16x - 7)^2$
- ☐ $(16x - 7)(16x + 7)$

---

**Question 5:** La forme développée de l'identité remarquable $(3t - 4)^2$ est :

- ☐ $9t^2 - 24t - 16$
- ☐ $9t^2 - 24t + 16$
- ☐ $3t^2 - 24t - 16$
- ☐ $3t^2 - 24t + 16$

---

**Question 6:** Développer et réduire l'expression littérale $A = (x + 3)^2$

---

**Question 7:** Développer et réduire l'expression littérale $B = (2 - 2x)^2$

---

**Question 8:** Développer et réduire l'expression littérale $C = (6x - 8)(6x + 8)$

---

**Question 9:** Développer et réduire l'expression littérale $D = (x + 2)^2 + (3x - 7)(2x + 1)$

---

**Question 10:** Développer et réduire l'expression littérale $E = (2x + 3)^2 - (3x - 7)(3x + 7)$

---

**Question 11:** Factoriser l'expression littérale $F = 49x^2 - 9$

---

**Question 12:** Factoriser l'expression littérale $G = 4x^2 + 28x + 49$

---

**Question 13:** Factoriser l'expression littérale $H = 81 - 18x + x^2$

---

**Question 14:** Factoriser l'expression littérale $I = (3x + 7)(2x + 3) + (3x - 7)(3x + 7)$

---

**Question 15:** Factoriser l'expression littérale $J = (2x + 1)(3x + 7) + 4x^2 + 4x + 1$

---

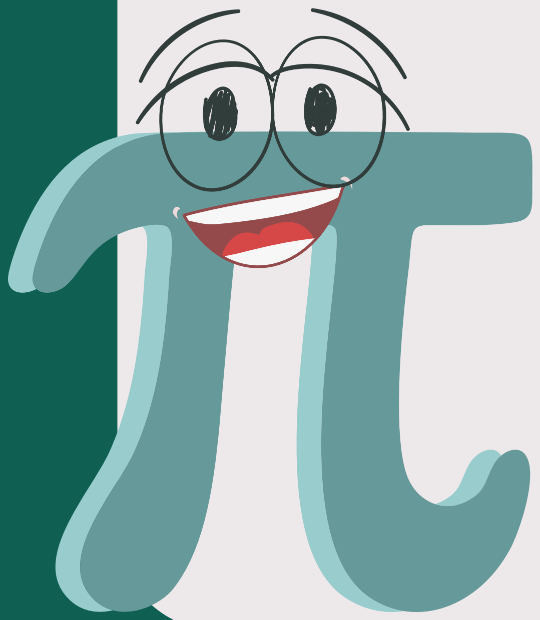
**Question 16:** Factoriser l'expression littérale $K = 4x^2 - 25 + (4x + 5)(2x + 5)$

---

**Bilan du Professeur**

| **Compétences** | **non acquis** | **en cours d'acquisition** | **acquis** |
|---|---|---|---|
| Savoir reconnaître les formes développées | | | |
| Savoir reconnaître les formes factorisées | | | |
| Savoir développer les expressions de la forme $(a+b)^2$ | | | |
| Savoir développer les expressions de la forme $(a-b)^2$ | | | |
| Savoir développer les expressions de la forme $(a+b)(a-b)$ | | | |
| Savoir factoriser les expressions de la forme $(a+b)^2$ | | | |
| Savoir factoriser les expressions de la forme $(a-b)^2$ | | | |
| Savoir factoriser les expressions de la forme $(a+b)(a-b)$ | | | |
| Savoir développer des expressions complexes | | | |
| Savoir factoriser des expressions complexes | | | |

# PASSONS À LA RECHERCHE DE PROBLÈMES



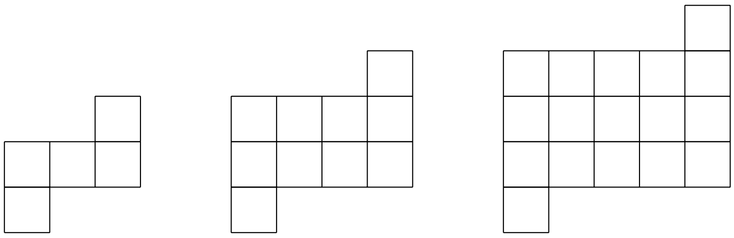
# RÉSOLUTION DE PROBLÈMES - Version Guidée

**Rappels utiles :**

$(a+b)^2 =$ ____________ $(a-b)^2 =$ ____________ $(a+b)(a-b) =$ ____________

**Exercice 1**

Avec des petits carrés tous identiques, on construit un pattern selon le modèle évolutif ci-dessous.



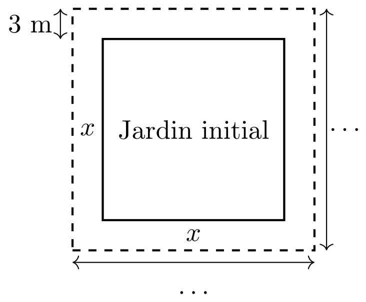
**Rang 1** **Rang 2** **Rang 3**

1. Comptez le nombre de petits carrés dans chaque rang :
   — Rang 1 : ____________ carrés
   — Rang 2 : ____________ carrés
   — Rang 3 : ____________ carrés
2. **Méthode 1 :** On peut voir la figure comme un "grand" carré moins deux rectangles.
3. **Méthode 2 :** On peut voir un "grand" rectangle et deux petits carrés
4. **Méthode 3 :** On peut voir un "moyen" carré et deux rectangles
5. Développez vos trois expressions et vérifiez qu'elles sont égales.

**Exercice 2**

Un jardinier possède un terrain carré de côté $x$ mètres. Il décide d'agrandir son jardin en ajoutant une bande de 3 mètres de large tout autour du terrain initial.

1. Sur le schéma ci-dessous, complétez les dimensions manquantes :




2. Le jardinier affirme : « L'aire que j'ai ajoutée est exactement égale à 6 fois le périmètre de mon jardin initial plus 36 m² ». Pour vérifier cela répondait aux questions suivantes :
   (a) Calculez l'aire du jardin initial : Aire initiale = ________________
   (b) Calculez l'aire du jardin agrandi (avec la bande) :
      — Le côté du jardin agrandi mesure : ________________
      — Donc l'aire du jardin agrandi = ________________
   (c) L'aire ajoutée est la différence : Aire ajoutée = ______________________
   (d) Développez cette expression en utilisant $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ :
      Aire ajoutée = ____________________________________________
   (e) Le périmètre du jardin initial est : $P = 4x$
      Calculez $6P + 36$ : ____________________________________________
   (f) Le jardinier a-t-il raison ? ________________
3. Pour le voisin avec un jardin de dimensions $x$ par $(x+6)$. Il souhaite lui aussi ajouter une bande de 3 mètres tout autour.
   — Aire initiale du voisin : ______________________
   — Dimensions du jardin agrandi : ___________ par ___________
   — Aire du jardin agrandi : ___________________________
   — Aire ajoutée par le voisin : ___________________________
   — Développez et comparez avec l'aire ajoutée par le jardinier. Que constatez-vous ?
4. Pour que l'aire agrandie soit le double de l'aire initiale :
   — Écrivez l'équation : $(x+6)^2 = 2 \times$ ___________
   — Développez : ________________________________
   — Simplifiez : ________________________________
   — Résolvez : $x =$ ________________

**Exercice 3**

Léa remarque quelque chose d'étonnant en jouant avec les nombres :

$3 \times 5 = 15$ et $4^2 = 16$ $\rightarrow$ différence de 1

$5 \times 7 = 35$ et $6^2 = 36$ $\rightarrow$ différence de 1

1. Testez avec $7 \times 9$ et $8^2$ :
   - $7 \times 9 =$ ____________
   - $8^2 =$ ____________
   - Différence : ____________
2. Compléter la conjecture suivante :

   « *Il semble que quand on multiplie deux nombres impairs consécutifs, on obtient toujours un nombre qui est . . . . . . . . . . de 1 au carré du nombre . . . . . . . . . . qui se trouve . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .* »
3. Pour prouver que cette conjecture est toujours vrai, on appelle $n$ un nombre pair quelconque.
   - Le nombre impair juste avant $n$ est : ____________
   - Le nombre impair juste après $n$ est : ____________
   - Le produit des deux impairs est : $(n-1)\times$ ____________ __________________
   - Utilisez $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ pour développer : ________________________
   - Le carré du nombre pair est : ____________
   - La différence est : __________________ $-$____________ $=$ ____________
4. Tom dit : « Le produit de deux nombres pairs consécutifs est toujours inférieur de 2 au carré du nombre impair entre eux. »

   Son exemple : $2 \times 4 = 8$ et $3^2 = 9$ donne une différence de ______, pas 2 !

   Tom s'est trompé dans : ________________________
5. Testons la version corrigée : « Le produit de deux pairs consécutifs est inférieur de ______ au carré de l'impair entre eux. »

   Avec $n$ impair quelconque :
   - Pair avant $n$ : ____________
   - Pair après $n$ : ____________
   - Produit : $(n-1)(n+1) =$ __________________
   - Carré de l'impair : $n^2$
   - Différence : ____________
6. **Généralisation :** Si deux nombres diffèrent de 2 :
   - Soit $n$ un nombre, l'autre est $n+2$
   - Produit : $n(n+2) =$ __________________
   - Nombre du milieu : $n+1$, son carré : $(n+1)^2 =$ ________________________
   - Différence : ______________________________

   Si deux nombres diffèrent de 3, trouvez la règle en suivant la même démarche.

   ______________________________________________________________________

   ______________________________________________________________________

**Exercice 4**

Un magicien propose le tour suivant :

- ☐ Choisissez un nombre $n$
- ☐ Ajoutez 5 : ____________
- ☐ Mettez au carré : __________________
- ☐ Prenez $n$, enlevez 5 : ____________
- ☐ Mettez au carré : __________________
- ☐ Faites la différence : ________________________
- ☐ Divisez par 10 : __________________

1. Testez avec $n = 7$ : résultat final = ____________
   Testez avec $n = 12$ : résultat final = ____________
   Que remarquez-vous ? ____________________________________
2. Pour comprendre le secret, développons avec $n$ quelconque :
   - $(n+5)^2 =$ ______________________________
   - $(n-5)^2 =$ ______________________________
   - Différence : ____________________________________
   - Après division par 10 : __________________

   Le secret du magicien : ____________________________________
3. Si on ajoute et soustrait 7 au lieu de 5 :
   - $(n+7)^2 - (n-7)^2 =$ ______________________________
   - Pour retrouver $n$, on divise par : ____________
4. Créez votre tour en choisissant un nombre à ajouter/soustraire : ____________
   Je propose le tour suivant :
   - ☐ Choisissez un nombre $n$
   - ☐ Ajoutez ____________ : ____________
   - ☐ Mettez au carré : __________________
   - ☐ Prenez $n$, enlevez ____________ : ____________
   - ☐ Mettez au carré : __________________
   - ☐ Faites la différence : ________________________
   - ☐ Divisez par ____________ : __________________

**Exercice 5**

Effectuez les calculs suivants :

$2^2 - 1^2 =$ ____________ $=$

$3^2 - 2^2 =$ ____________ $=$

$4^2 - 3^2 =$ ____________ $=$

$5^2 - 4^2 =$ ____________ $=$

$10^2 - 9^2 =$ ____________ $=$

1. Que constatez-vous ? Conjecture à compléter : Il semble que la différence entre les carrés de deux entiers consécutifs est égale à ________________________
2. Pour le prouver, on note $n$ et $n+1$ deux entiers consécutifs :
   — $(n+1)^2 =$ ________________________

   — $(n+1)^2 - n^2 =$ ______________________________

   — Après simplification : __________________
3. Écrivez la propriété prouvée : ________________________________________________

   ____________________________________________________________________________________________________
4. Pour écrire 15 comme différence de carrés :
   — On cherche $n$ tel que $2n + 1 = 15$

   — Donc $n =$ ____________

   — $15 =$ ____________ $^2 -$ ____________ $^2$
5. Pour écrire 57 comme différence de carrés :
   — On cherche $n$ tel que ____________ $= 57$

   — Donc $n =$ ____________

   — $57 =$ ____________ $^2 -$ ____________ $^2$
6. Pour 349 : $n =$ ____________, donc $349 =$ __________________

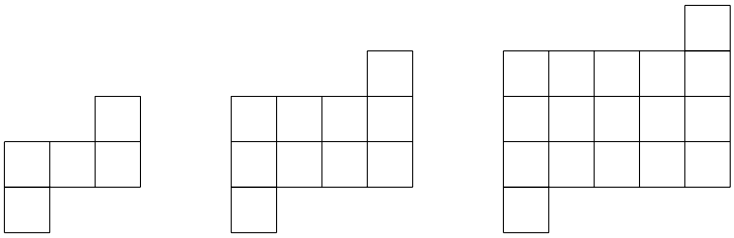
# RÉSOLUTION DE PROBLÈMES - Version Intermédiaire

**Rappels utiles :**

$(a+b)^2 =$ ____________ $(a-b)^2 =$ ____________ $(a+b)(a-b) =$ ____________

**Exercice 1**

Avec des petits carrés tous identiques, on construit un pattern selon le modèle évolutif ci-dessous.



**Rang 1** **Rang 2** **Rang 3**

1. Dénombrez les carrés pour les rangs 1, 2 et 3.
2. Trouvez **trois manières différentes** de calculer le nombre de petits carrés au rang $a$ (avec $a \in \mathbb{N}$). Pour chaque méthode :
   — Expliquez comment vous voyez la figure (par exemple : "grand" carré moins deux rectangles, somme de rectangles, etc.)
   — Écrivez l'expression algébrique correspondante

   *Indication : Pensez à identifier des formes géométriques simples dans la figure.*
3. Développez et réduisez chacune de vos trois expressions pour prouver qu'elles sont toutes égales.

**Exercice 2**

Un jardinier possède un terrain carré de côté $x$ mètres. Il décide d'agrandir son jardin en ajoutant une bande de 3 mètres de large tout autour du terrain initial.

1. Faites un schéma clair de la situation en indiquant toutes les dimensions pertinentes.
2. Le jardinier affirme : « L'aire que j'ai ajoutée est exactement égale à 6 fois le périmètre de mon jardin initial plus 36 m**²**. »

   Pour vérifier cette affirmation :
   (a) Exprimez l'aire du jardin initial en fonction de $x$.
   (b) Exprimez l'aire du jardin agrandi en fonction de $x$.
   (c) Déduisez-en l'aire ajoutée et développez cette expression.
   (d) Calculez $6P + 36$ où $P$ est le périmètre du jardin initial.
   (e) Concluez : le jardinier a-t-il raison ?
3. Un voisin possède un jardin rectangulaire de dimensions $x$ mètres sur $(x+6)$ mètres. Il souhaite lui aussi ajouter une bande de 3 mètres tout autour.

   (a) Calculez l'aire ajoutée par le voisin.
   (b) Développez cette expression et comparez-la avec l'aire ajoutée par le jardinier.
   (c) Que constatez-vous ? Comment pouvez-vous expliquer ce résultat ?

4. Pour quelle(s) valeur(s) de $x$ l'aire du jardin agrandi du jardinier est-elle exactement le double de l'aire de son jardin initial ?

   *Indication : Posez une équation et utilisez les identités remarquables pour la résoudre.*

**Exercice 3**

Léa remarque quelque chose d'étonnant en jouant avec les nombres :

$$\begin{array}{ccccc} 3 \times 5 = 15 & \text{et} & 4^2 = 16 & \rightarrow & \text{différence de 1} \\ 5 \times 7 = 35 & \text{et} & 6^2 = 36 & \rightarrow & \text{différence de 1} \\ 10 \times 12 = 120 & \text{et} & 11^2 = 121 & \rightarrow & \text{différence de 1} \end{array}$$

Elle formule alors une conjecture : « *Quand on multiplie deux nombres impairs consécutifs, on obtient toujours un nombre qui est inférieur de 1 au carré du nombre pair qui se trouve entre les deux.* »

1. Vérifiez la conjecture de Léa avec deux autres exemples de votre choix.
2. Prouvez la conjecture de Léa de manière générale.

   *Indication : Notez $n$ un nombre pair quelconque, exprimez les deux nombres impairs qui l'encadrent, puis calculez leur produit et comparez-le à $n^2$.*
3. Son frère Tom affirme : « *Moi aussi j'ai trouvé quelque chose ! Le produit de deux nombres pairs consécutifs est toujours inférieur de 2 au carré du nombre impair qui se trouve entre eux.* »

   Il donne l'exemple : $2 \times 4 = 8$ et $3^2 = 9$

   (a) Quelle est l'erreur dans le raisonnement de Tom ?

   (b) Corrigez sa conjecture et prouvez-la.
4. Généralisez ces résultats :

   (a) Que se passe-t-il quand on multiplie deux nombres quelconques qui diffèrent de 2 ? Établissez une formule générale et prouvez-la.

   (b) Même question si les deux nombres diffèrent de 3.

   (c) Pouvez-vous trouver une règle générale pour deux nombres qui diffèrent de $k$ ?

   *Indication : Utilisez l'identité remarquable* $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

**Exercice 4**

Un magicien propose le tour suivant à son public :

- ☐ Choisissez un nombre $n$
- ☐ Ajoutez 5 : ____________
- ☐ Mettez au carré : __________________
- ☐ Prenez $n$, enlevez 5 : ____________
- ☐ Mettez au carré : __________________
- ☐ Faites la différence : ________________________
- ☐ Divisez par 10 : __________________

Le magicien demande uniquement le résultat final et annonce immédiatement le nombre de départ choisi par la personne.

1. Testez ce tour avec trois nombres différents de votre choix. Que remarquez-vous entre le nombre de départ et le résultat final ?

2. Expliquez le secret du magicien en développant algébriquement toutes les étapes du tour avec un nombre $n$ quelconque.

   *Indication : Calculez* $(n+5)^2 - (n-5)^2$ *puis divisez par 10.*

3. Le magicien décide de modifier son tour. Il demande maintenant d'ajouter 7 au nombre initial (au lieu de 5) et de soustraire 7 au nombre initial (au lieu de 5).

   Par quel nombre doit-il faire diviser à la fin pour que le tour fonctionne encore ? Justifiez votre réponse par un calcul algébrique.

4. Créez votre propre variante du tour de magie :
   (a) Choisissez le nombre à ajouter et soustraire.
   (b) Déterminez par quel nombre il faut diviser.
   (c) Expliquez le principe général de votre tour.

**Exercice 5**

Effectuez les calculs suivants et continuez sur le même modèle :

$2^2 - 1^2 =$

$3^2 - 2^2 =$

$4^2 - 3^2 =$

$5^2 - 4^2 =$

$\dots$

1. Que constatez-vous ? Formulez une conjecture sur la différence des carrés de deux entiers consécutifs.
2. Prouvez votre conjecture de manière générale.

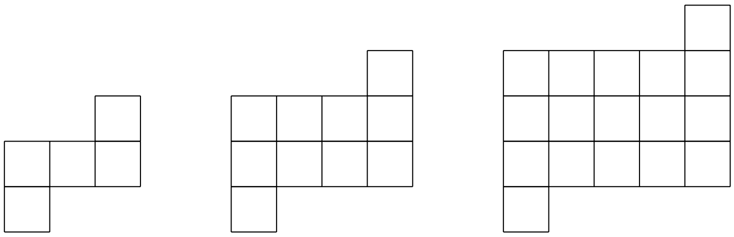
   *Indication : Notez* $n$ *et* $n+1$ *deux entiers consécutifs, calculez* $(n+1)^2 - n^2$ *et développez.*
3. Exprimez la propriété trouvée par une phrase claire et complète.
4. Application : En utilisant votre propriété, écrivez les nombres suivants comme différence des carrés de deux entiers consécutifs :
   (a) 15

   Pour écrire 15 comme différence de carrés :
   — On cherche $n$ tel que $2n + 1 = 15$
   — Donc $n =$ __________
   — $15 = \underline{\hspace{2cm}}^2 - \underline{\hspace{2cm}}^2$

   (b) 57
   (c) 349
   (d) 2025
5. **Question bonus :** Tous les nombres impairs peuvent-ils s'écrire comme la différence de deux carrés consécutifs ? Et les nombres pairs ? Justifiez votre réponse.

# RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

**Exercice 1**
Avec des petits carrés tous identiques, on construit un pattern selon le modèle évolutif ci-dessous.



**Rang 1** **Rang 2** **Rang 3**

Trouvez **quatre manières différentes** de calculer le nombre de petits carrés au rang $a$ (avec $a \in \mathbb{N}$) en complétant la figure avec des formes simples (carrés, rectangles, etc.).
Pour chaque méthode, écrivez l'expression algébrique correspondante, puis prouvez que vos quatre expressions sont égales.

**Exercice 2**
Un jardinier possède un terrain carré de côté $x$ mètres. Il décide d'agrandir son jardin en ajoutant une bande de 3 mètres de large tout autour du terrain initial.

1. Faire un schéma pour représenter la situation
2. Le jardinier affirme : « L'aire que j'ai ajoutée est exactement égale à 6 fois le périmètre de mon jardin initial plus 36 $\mathrm{m}^2$ ». A-t-il raison ? Justifiez votre réponse.
3. Un voisin possède un jardin rectangulaire de dimensions $x$ mètres sur $(x+6)$ mètres. Il souhaite lui aussi ajouter une bande de 3 mètres tout autour.

   Comparez l'aire ajoutée par le jardinier (avec son jardin carré) et l'aire ajoutée par son voisin (avec son jardin rectangulaire). Que constatez-vous ?
4. Pour quelle(s) valeur(s) de $x$ l'aire du jardin agrandi du jardinier est-elle exactement le double de l'aire de son jardin initial ?

**Exercice 3**
Léa remarque quelque chose d'étonnant en jouant avec les nombres :

$$\begin{array}{c}
3 \times 5 = 15 \quad \text{et} \quad 4^2 = 16 \quad \rightarrow \quad \text{différence de 1} \\
5 \times 7 = 35 \quad \text{et} \quad 6^2 = 36 \quad \rightarrow \quad \text{différence de 1} \\
10 \times 12 = 120 \quad \text{et} \quad 11^2 = 121 \quad \rightarrow \quad \text{différence de 1}
\end{array}$$

Elle formule alors une conjecture : « *Quand on multiplie deux nombres impairs consécutifs, on obtient toujours un nombre qui est inférieur de 1 au carré du nombre pair qui se trouve entre les deux.* »

1. Vérifiez la conjecture de Léa avec d'autres exemples de votre choix.
2. Léa a-t-elle raison ? Prouvez votre réponse de manière générale pour n'importe quels nombres impairs consécutifs.
3. Son frère Tom affirme : « *Moi aussi j'ai trouvé quelque chose ! Le produit de deux nombres pairs consécutifs est toujours inférieur de 2 au carré du nombre impair qui se trouve entre eux.* »

Par exemple : $2 \times 4 = 8$ et $3^2 = 9$ (différence de 1... attendez, ce n'est pas 2 !)

Tom s'est-il trompé dans sa conjecture ou dans son exemple ? Que pouvez-vous dire de sa conjecture ?

4. Peut-on généraliser ce résultat ? Que se passe-t-il quand on multiplie deux nombres quelconques qui diffèrent de 2 ? Et s'ils diffèrent de 3 ? Trouvez une règle générale.

**Exercice 4**

Un magicien propose le tour suivant à son public :

1. « Choisissez un nombre entier en secret »
2. « Ajoutez 5 à ce nombre »
3. « Multipliez le résultat par lui-même (mettez-le au carré) »
4. « Maintenant, prenez votre nombre initial, enlevez-lui 5, et multipliez ce résultat par lui-même »
5. « Calculez la différence entre les deux carrés que vous avez obtenus »
6. « Divisez le résultat par 10 »
7. Le magicien annonce : « Je devine votre nombre de départ ! »

Le magicien demande uniquement le résultat final et annonce immédiatement le nombre de départ choisi par la personne.

1. Testez ce tour avec plusieurs nombres de votre choix. Que remarquez-vous ?
2. Comment le magicien fait-il pour retrouver le nombre de départ ? Expliquez son secret.
3. Le magicien décide de modifier son tour. Il demande maintenant :
   - d'ajouter 7 au nombre initial (au lieu de 5)
   - de soustraire 7 au nombre initial (au lieu de 5)
   - et de diviser par un certain nombre à la fin

   Par quel nombre doit-il faire diviser pour que le tour fonctionne encore ?
4. Créez votre propre tour de magie en choisissant le nombre à ajouter et soustraire. Expliquez comment il fonctionne.
5. **Défi :** Le magicien veut corser son tour. Il demande d'ajouter un nombre $a$ et de soustraire un nombre $b$ différent (avec $a \neq b$). Peut-il encore retrouver le nombre de départ ? Si oui, quelle information supplémentaire doit-il demander ?

**Exercice 5**

Effectue les calculs suivants et continue sur le même modèle

$2^2 - 1^2 =$

$3^2 - 2^2 =$

$4^2 - 3^2 =$

$\ldots\ldots$

Que constates-tu ? Prouve-le.

Exprime la propriété trouvée par une phrase.

Quand la propriété est énoncée, proposer la question suivante :

Écrire 15, puis 57, puis 349 comme différence des carrés de 2 entiers consécutifs.